Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre
Fakulta ekonomiky a manažmentu
Katedra matematiky

UNIVERZITNÉ MATEMATICKÉ VZDELÁVANIE AKO ZÁKLAD PRE INOVÁCIE VO VEDE A TECHNIKE

UNIVERSITY MATHEMATICAL EDUCATION AS A BASIS FOR INNOVATIONS IN SCIENCE AND TECHNOLOGY

Recenzovaný vedecký zborník
Reviewed scientific proceedings

Nitra 2019

Názov:
Univerzitné matematické vzdelávanie ako základ pre inovácie vo vede a technike
Recenzovaný vedecký zborník v elektronickej forme

Title:
University mathematical education as a basis for innovations in science and technology
Reviewed scientific proceedings in electronic form

Vedeckí garanti /Scientific Committee
Prof. Dr. Ing. Elena Horská, dekanka Fakulty ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre
Doc. RNDr. Dana Országhová, CSc., vedúca Katedry matematiky FEM SPU v Nitre
Ing. Pavel Fľak, DrSc., Komisia pre biometriku, Slovenská akadémia pôdohospodárskych vied
Doc. Ing. Viera Papcunová, PhD., Ústav ekonomiky a manažmentu FPV UKF v Nitre
RNDr. Radovan Potůček, Ph.D., Katedra matematiky a fyziky, Univerzita obrany, Brno
Mgr. Radomíra Hornyák Gregáňová, PhD., Katedra matematiky FEM SPU v Nitre
Assoc. prof. Olena Melnichenko, PhD., Department of Mathematics and Physics, Bila Tserkva National Agrarian University

Zoznam recenzentov/List of Reviewers (v abecednom poradí/ in alphabetical order)
Doc. Ing. Alena Andrejovská, PhD., Assoc. professor Tetyana Arbuzova, PhD.,
Ing. Milada Balková, PhD., Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.,
Doc. RNDr. Monika Božiková, PhD., Ing. Pavel Fľak, DrSc., Prof. Ing. Mgr. Jaroslav Husár, CSc.,
Mgr. Norbert Kecskés, PhD., Doc. RNDr. Dana Országhová, CSc., Doc. RNDr. Oleg Palumbíny, CSc.,
Doc. Ing. Viera Papcunová, PhD., Doc. Ing. Zuzana Poláková, PhD.,
PaedDr. Lucia Rumanová, PhD., Doc. Ing. Juraj Tej, PhD., Prof. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.,
Mgr. Michaela Vargová, PhD., Ing. Ivana Váryová, PhD., Doc. Ing. Iveta Zentková, CSc.

Zostavovatelia zborníka/Editors of Proceedings
Doc. RNDr. Dana Országhová, CSc., Fakulty ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre
Ing. Tatiana Ivanková, Fakulty ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre

Schválila rektorka Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre dňa 30. 7. 2019
ako recenzovaný vedecký zborník v elektronickej forme.

Publikácia vznikla v rámci riešenia projektu s podporou grantu Slovenskej agentúry KEGA č. 029SPU-4/2018: „Digitálne edukačné aplikácie v matematike".
Dostupné na internete: http://www.fem.uniag.sk/sk/katedra-matematiky-zborniky/

ISBN 978-80-552-2028-4

Obsah/Content

ÚVOD K VYDANIU RECENZOVANÉHO VEDECKÉHO ZBORNÍKA

Vážené kolegyne, vážení kolegovia,

Predložený recenzovaný vedecký zborník je súčasťou riešenia projektu KEGA č. 029SPU-4/2018: „Digitálne edukačné aplikácie v matematike". Projekt získala Katedra matematiky Fakulty ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre a obdobie jeho riešenia je v priebehu rokov 2018 až 2020. Dôležitou súčasťou aktivít katedry je vedecko-výskumná činnosť, ktorá je zameraná na tieto oblasti:

- zvyšovanie kvality vyučovania matematiky na vysokých školách,
- inovácia a aktualizácia učebných osnov matematických predmetov,
- aplikácia matematických metód v ekonómii, manažmente a v technických odboroch,
- príprava učebníc a študijných materiálov v tlačenej a elektronickej podobe,
- uplatnenie nástrojov informačných technológií a implementácia metód elektronického vzdelávania do vyučovania a štúdia matematiky na univerzitách,
- tvorba interaktívnych elektronických vzdelávacích materiálov v prostredí LMS Moodle,
- prezentovanie výsledkov výskumu prostredníctvom vydávania elektronického časopisu „Mathematics in Education, Research and Applications" (v skratke MERAA), ISSN 2453-6881, ktorý je dostupný na webovej stránke: http://meraa.uniag.sk/

Katedra matematiky od roku 1972 garantuje matematické predmety a zabezpečuje prednášky a cvičenia z matematiky pre študentov Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre (predtým Vysoká škola poľnohospodárska). Obsah matematických predmetov a aplikačné zameranie matematického vzdelávania patria stále k diskutovaným témam na odbornej a akademickej pôde, ako aj v radoch širokej verejnosti. V súčasnej pedagogickej praxi zaznamenávame javy a zmeny v matematickom vzdelávaní, ktoré súvisia s rôznymi faktormi:

- nepovinná maturitná skúška z matematiky na stredných školách,
- redukcia v obsahu a rozsahu matematiky na stredných školách,
- nepovinné prijímacie skúšky z matematiky na vysokých školách a fakultách s ekonomickým a technickým zameraním,
- implementácia informačno-komunikačných technológií do matematického vzdelávania,
- požiadavka praxe na rozšírenie počtu hodín matematiky a fyziky pre technické odbory,
- digitalizácia procesu vzdelávania na všetkých stupňoch vzdelávania.

Povinné matematické predmety na Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre sú zaradené do teoretického základu na bakalárskom stupni štúdia. Cieľom výučby je naučiť študentov matematické poznatky a metódy, ktoré majú aplikácie v ďalších študijných predmetoch, vedných disciplínach, v odvetviach praxe, vo výrobných technológiách a postupoch.

Motivácia do štúdia matematiky a jej aplikácií je stále dôležitou súčasťou vzdelávania na ekonomických a technických fakultách. V jednotlivých príspevkoch sa autori zaoberajú problematikou a úlohami matematického vzdelávania, prezentujú výsledky vedeckého výskumu a možnosti aplikácie matematických metód. Ďakujeme autorom príspevkov za ich vytvorenie a čitateľom želáme, aby v nich našli nové podnety a zaujímavé myšlienky.

doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.
vedúca Katedry matematiky FEM SPU v Nitre

Univerzitné matematické vzdelávanie ako základ pre inovácie vo vede a technike

GEOGEBRA A GRAFICKÉ RIEŠENIE ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Janka Drábeková, SR

ABSTRAKT

Lineárne programovanie je jedným z najpoužívanejších a najvýkonnejších kvantitatívnych nástrojov v riadení podnikov, pretože môže byť aplikované na širokú škálu rôznych operačných problémov. Mnohé rozhodnutia, ktorým čelí prevádzkový manažér, sa sústreďujú okolo najlepšieho spôsobu, ako dosiahnuť ciele firmy v súlade s obmedzeniami operačného prostredia. V príspevku sa zaoberáme grafickým riešením úloh lineárneho programovania s dvoma rozhodovacími premennými pomocou softvéru GeoGebra. Základnými krokmi v grafickej metóde je zakreslenie modelových obmedzení v karteziánskej sústave súradníc a identifikácia množiny, ktorá spĺňa všetky obmedzenia súčasne. Bod na hranici tejto množiny, ktorý maximalizuje resp. minimalizuje cieľovú funkciu, je hľadaným optimálnym riešením. Pri hľadaní množiny prípustných riešení môžu nastať tri prípady. Vizualizácia aplikovaných problémov poskytuje názornú predstavu o podstate optimalizačného problému a umožňuje ľahšie pochopenie základnej idei.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: GeoGebra, grafické riešenie nerovníc, lineárne programovanie, ekonomicko-matematický model

ÚVOD

Optimalizácia nie je len koncept využívaný v ekonomických analýzach, ale je to proces týkajúci sa každého z nás. Každý deň optimalizujeme svoje činnosti, snažíme sa cestovať čo najkratšou cestou, kúpiť čo najlepší výrobok za čo najnižšiu cenu, t.j. snažíme sa svoje potreby minimalizovať, resp. maximalizovať. V podnikoch sú tieto rozhodnutia súčasťou práce manažérov. Každodenne sa snažia o dosiahnutie maximálneho zisku pri minimálnych nákladoch, efektívneho využitia zdrojov či ľudského kapitálu atď. Pri tom všetkom však musia rešpektovať limitované zdroje, požiadavky dodávateľov a odberateľov a rôzne iné obmedzujúce faktory, ktoré môžu byť vyvolané situáciou na trhu, ľudskými zdrojmi, požiadavkami na bezpečnosť výroby či ochranu životného prostredia [1]. Optimalizáciu výrobných či iných rozhodovacích situácií môžeme dosiahnuť metódami matematického programovania, t.j. transformáciou reálnych procesov do matematických modelov. Ak ciele (účelové funkcie) vyjadríme pomocou lineárnych funkcií a obmedzujúce podmienky tvoria sústavu lineárnych nerovníc a rovníc, tak hovoríme o lineárnom programovaní. Lineárne programovanie patrí medzi najpoužívanejšie a najvýkonnejšie kvantitatívne nástroje v manažérskom riadení podnikov [4]. Dá sa totiž aplikovať na širokú škálu problémov [4,5]: plánovanie agregovanej výroby, zmiešavacie resp. nutričné problémy, investičné resp. kapitálové plánovanie, dopravné problémy, hľadanie najkratšej cesty alebo maximálneho toku v sieti atď. Pre úspešné riešenie spomínaných problémov sú nevyhnutné rozvinuté matematické kompetencie manažérov. Schopnosť aplikovať matematické myslenie sa však nevyvíja sama od seba, je nutné aplikované problémy zavádzať do vyučovacieho procesu. Aplikačné úlohy odstraňujú formálne prijímanie poznatkov a približujú matematiku k potrebám študentov [2]. V príspevku chceme poukázať na významnú úlohu matematických vedomostí v úlohách lineárneho programovania. Grafická vizualizácia úloh je nevyhnutný nástroj ekonomickej analýzy vhodný na úspešné odhalenie a pochopenie väzieb medzi veličinami.

MATERIÁL A METÓDY

Ekonomicko-matematický model úlohy lineárneho programovania definujeme nasledovne:

Účelová funkcia: $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \rightarrow$ maximum (minimum)

Obmedzujúce podmienky: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j (\leq, \geq, =) b_i, i = 1,2, \dots, m$

Podmienky nezápornosti: $x_j \geq 0, j = 1,2, \dots, n$

kde, x_j – predstavujú štruktúrne premenné, c_j – reprezentujú ocenenia, a_{ij} – sú štruktúrne koeficienty vyjadrené na jednu jednotku štruktúrnej premennej, b_i – vyjadrujú hodnoty požiadaviek alebo zdrojov.

V príspevku sa zaoberáme grafickým riešením úloh lineárneho programovania s dvoma rozhodovacími premennými pomocou softvéru GeoGebra. Pri hľadaní množiny prípustných riešení môžu nastať tri prípady:

- Sústava nerovníc reprezentujúca obmedzujúce podmienky je konzistentná a jej riešením v 1.kvadrante je ohraničená konvexná množina bodov, tzv. konvexný polyéder.
- Sústava nerovníc reprezentujúca obmedzujúce podmienky je konzistentná a jej riešením pri zohľadnení podmienok nezápornosti je neohraničená konvexná množina bodov.
- Sústava nerovníc reprezentujúca obmedzujúce podmienky je nekonzistentná v 1.kvadrante a množina prípustných podmienok je prázdna.

VÝSLEDKY A DISKUSIA

V tejto časti sa budeme venovať grafickej interpretácii riešenia úloh lineárneho programovania (ÚLP). Pri tvorbe úloh sme sa inšpirovali príkladmi z odbornej literatúry [3,4,6]. Modelové situácie riešime graficky pomocou softvéru GeoGebra, ktorý je podľa nás vhodný na vizualizáciu aplikovaných problémov. Napriek tomu, že praktické úlohy s dvoma premennými sa vyskytujú v praxi zriedka, je užitočné venovať pozornosť grafickému riešeniu úloh tohto typu, pretože ich grafická interpretácia poskytuje názornú predstavu o podstate optimalizačného problému a umožňuje ľahšie pochopenie základnej idei, na ktorej spočíva riešenie ÚLP [4].

Prípad 1

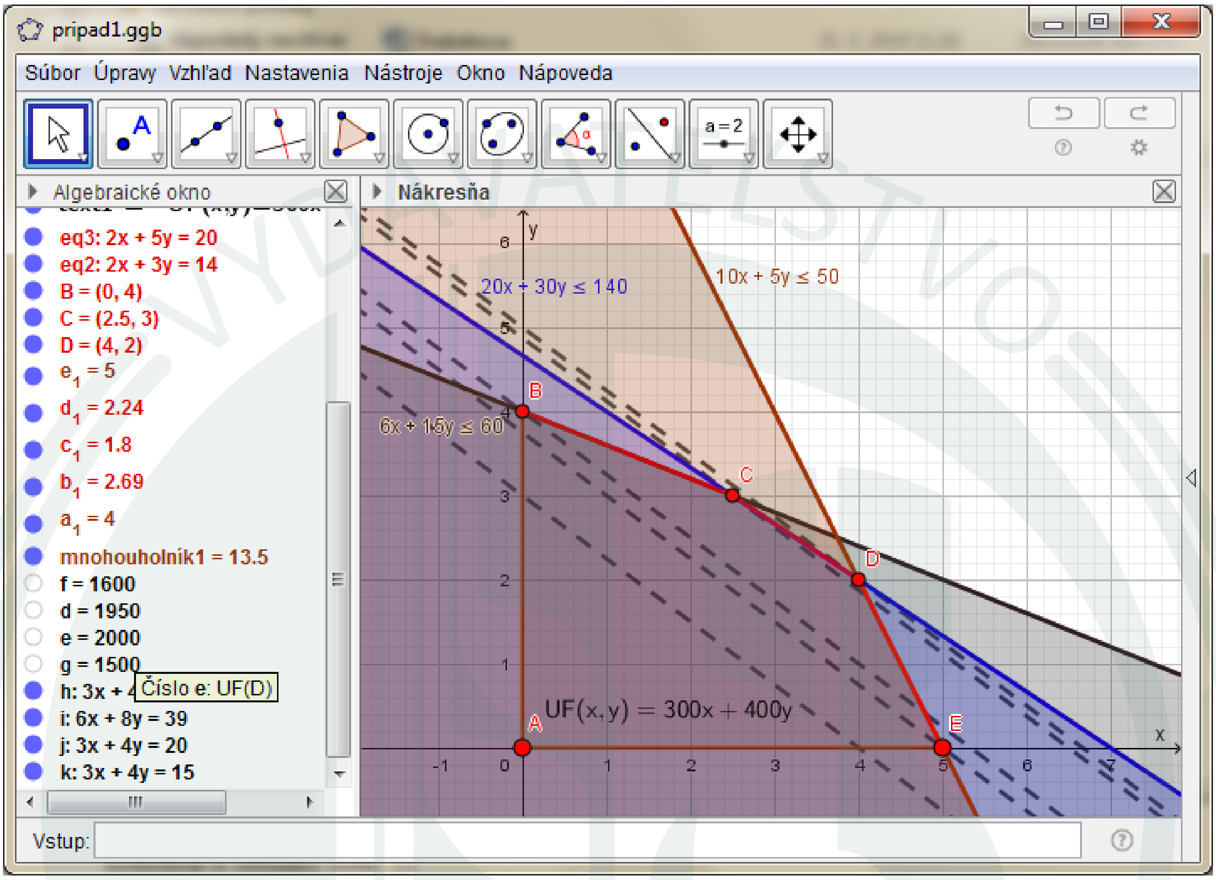
Nájdite optimálne prípustné riešenie pre nasledujúcu úlohu LP:

Účelová funkcia: $UF(x, y) = 300x + 400y \rightarrow$ maximum

Obmedzujúce podmienky:
$$\begin{aligned} 20x + 30y &\leq 140 \\ 6x + 15y &\leq 60 \\ 10x + 5y &\leq 50 \end{aligned}$$

Podmienky nezápornosti: $x \geq 0 \land y \geq 0$

Grafická ilustrácia riešenia sa nachádza na Obr.1. Vzhľadom na podmienky nezápornosti, je množina prípustných riešení v danom prípade konvexný päťuholník A, B, C, D, E. Optimálne riešenie, ktoré maximalizuje hodnotu účelovej funkcie sa nachádza v bode D.



Obr. 1

Softvér GeoGebra nám umožní graficky znázorniť riešenia lineárnych nerovníc reprezentujúcich obmedzujúce podmienky problému jednoduchým zadaním nerovnice v príkazovom riadku. Ak chceme zvýrazniť množinu prípustných riešení, musíme zvýrazniť hraničné body množiny, t.j. vrcholy, a pomocou nástroja na zostrojenie pravidelného *n*-uholníka množinu farebne označiť. Zostrojíme priamku reprezentujúcu účelovú funkciu, napr. $UF(x, y) = 300x + 400y = 1200$, následne zostrojíme rovnobežky s danou priamkou prechádzajúce cez vrcholy množiny prípustných riešení a hľadáme v ktorom z vrcholov dosahuje maximálnu hodnotu. Z Obr.1 môžeme vyčítať funkčnú hodnotu účelovej funkcie v daných bodoch $f = UF(B) = 1600$, $d = UF(C) = 1950$, $e = UF(D) = 2000$, $g = UF(E) = 1500$. Tak ako bolo spomínané vyššie maximálnu hodnotu dosahuje účelová funkcia v bode D.

Prípad 2

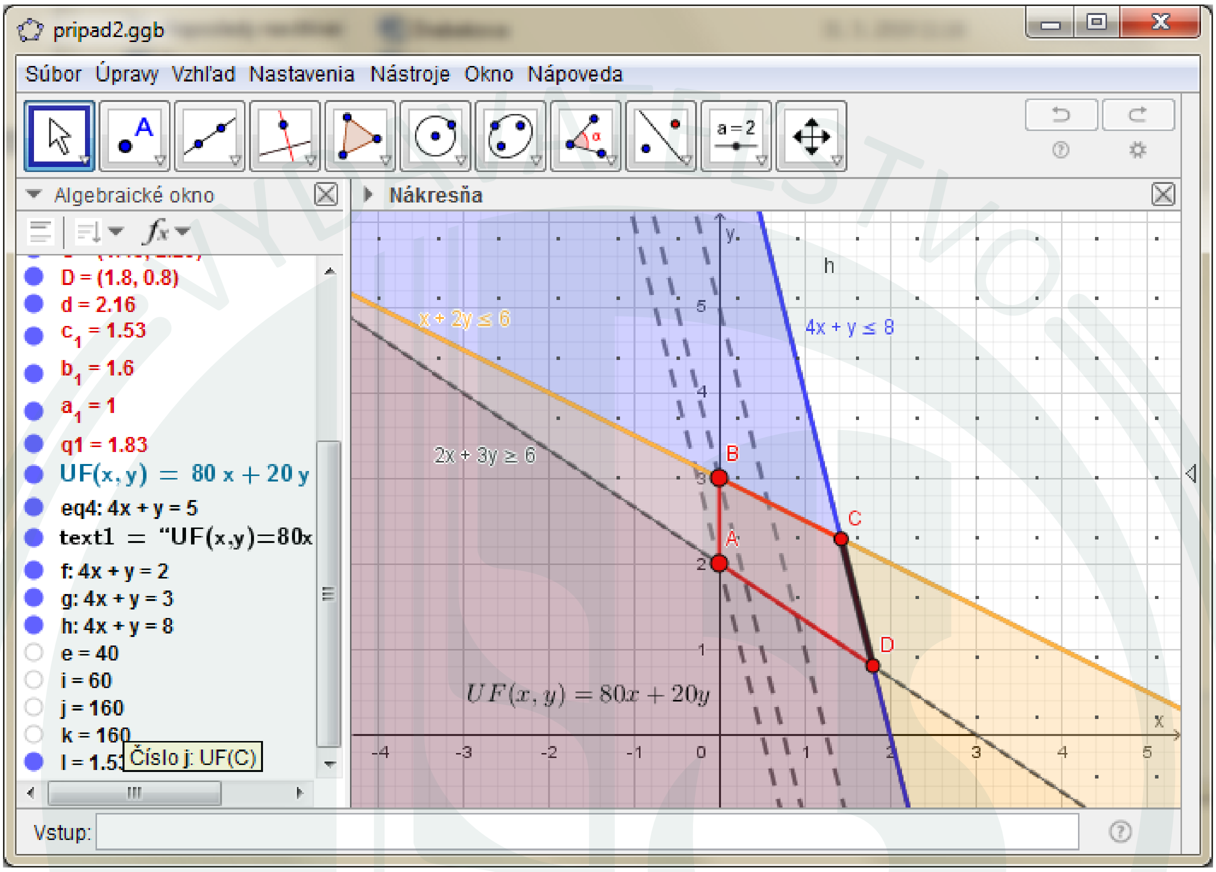
Nájdite optimálne prípustné riešenie pre nasledujúcu úlohu LP:

Účelová funkcia: $UF(x, y) = 80x + 20y \rightarrow$ maximum (minimum)

Obmedzujúce podmienky:
$$\begin{aligned} 4x + y &\leq 8 \\ x + 2y &\leq 6 \\ 2x + 3y &\geq 6 \end{aligned}$$

Podmienky nezápornosti: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Grafická ilustrácia riešenia sa nachádza na Obr.2. Vzhľadom na podmienky nezápornosti, je množina prípustných riešení v danom prípade konvexný štvoruholník A, B, C, D. Úloha má nekonečne veľa optimálnych riešení, pretože účelová funkcia nadobúda maximálnu hodnotu vo všetkých bodoch úsečky CD.



Obr. 2

Podobne ako v prípade 1 pri využití softvéru GeoGebra najskôr graficky znázorníme riešenia lineárnych nerovníc reprezentujúcich obmedzujúce podmienky úlohy. Zvýrazníme vrcholy množiny prípustných riešení a zostrojíme priamku reprezentujúcu účelovú funkciu, napr. $UF(x, y) = 80x + 20y = 100$. Následne zostrojíme rovnobežky s priamkou reprezentujúcou účelovú funkciu prechádzajúce cez vrcholy štvoruholníka (A, B, C, D) znázorňujúceho množinu prípustných riešení. Vzhľadom na fakt, že rovnobežky prechádzajúce cez body C, D sú totožné, môžeme vysloviť záver, že úloha má nekonečne veľa optimálnych riešení. Pomocou softvéru GeoGebra vypočítame hodnotu účelovej funkcie vo vrcholoch štvoruholníka $e = UF(A) = 40$, $i = UF(B) = 60$, $j = UF(C) = 160, k = UF(D) = 160$. Maximálnu hodnotu nadobúda účelová funkcia v bodoch C, D a vo všetkých ostatných bodoch, ktoré sú lineárnou kombináciou týchto krajných bodov úsečky CD.

Prípad 3

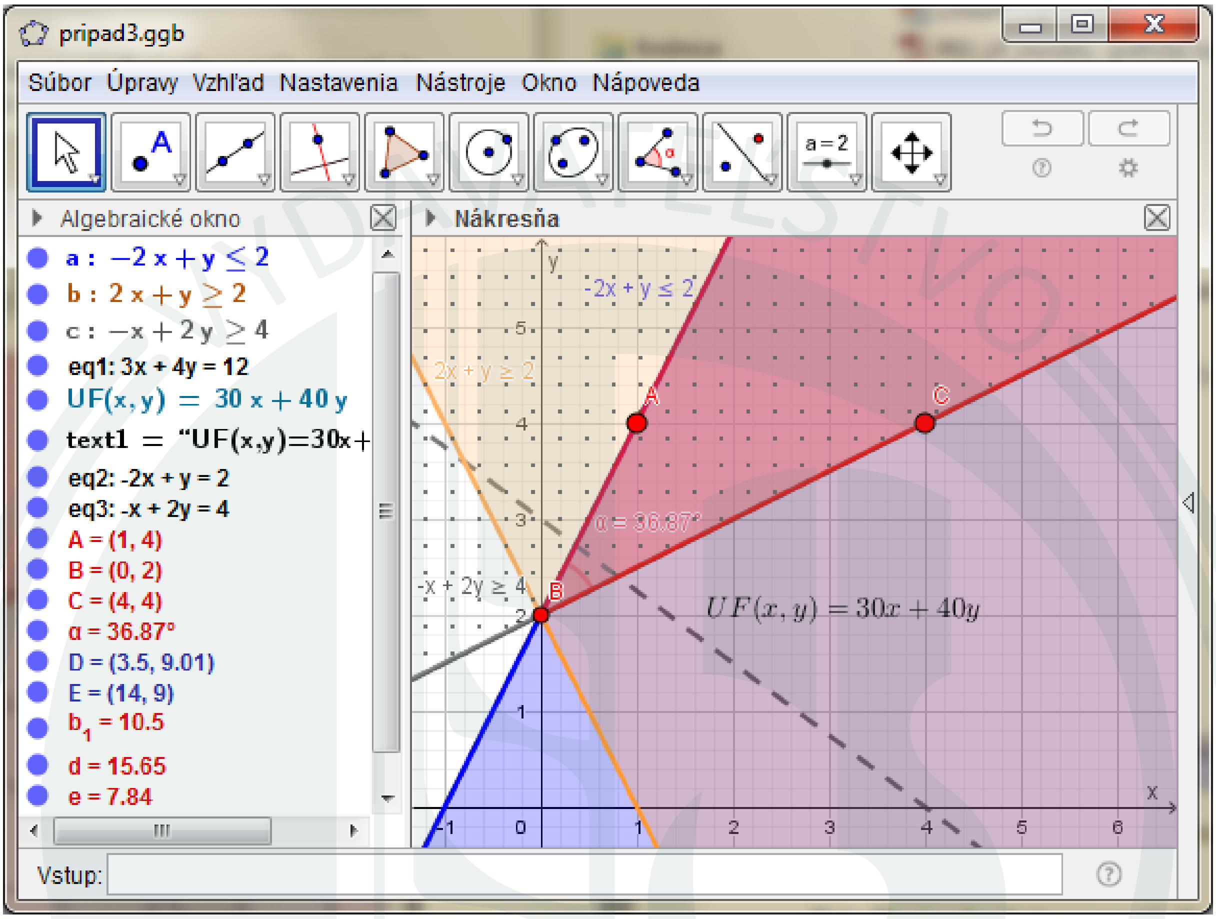
Nájdite optimálne prípustné riešenie pre nasledujúcu úlohu LP:

Účelová funkcia: $UF(x, y) = 30x + 40y \rightarrow$ maximum

Obmedzujúce podmienky:
$$\begin{aligned} -2x + y &\leq 2 \\ 2x + y &\geq 2 \\ -x + 2y &\geq 4 \end{aligned}$$

Podmienky nezápornosti: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Grafická ilustrácia riešenia sa nachádza na Obr.3. Množina prípustných riešení je v danom prípade neohraničená konvexná množina. Reprezentuje ju vnútorná oblasť uhla $\measuredangle ABC$. Účelová funkcia nenadobúda na množine prípustných riešení konečnú hodnotu.



Obr. 3

Ak chceme k záveru dospieť pomocou softvéru GeoGebra, najskôr graficky znázorníme riešenia lineárnych nerovníc reprezentujúcich obmedzujúce podmienky úlohy. Zvýrazníme množinu prípustných riešení, ktorá v danom prípade predstavuje body ležiace na ramenách a vo vnútornej oblasti uhla $\measuredangle ABC$. Keďže množina prípustných riešení nie je konečná, nevieme nájsť konečné optimálne riešenie pre danú ÚLP.

Prípad 4

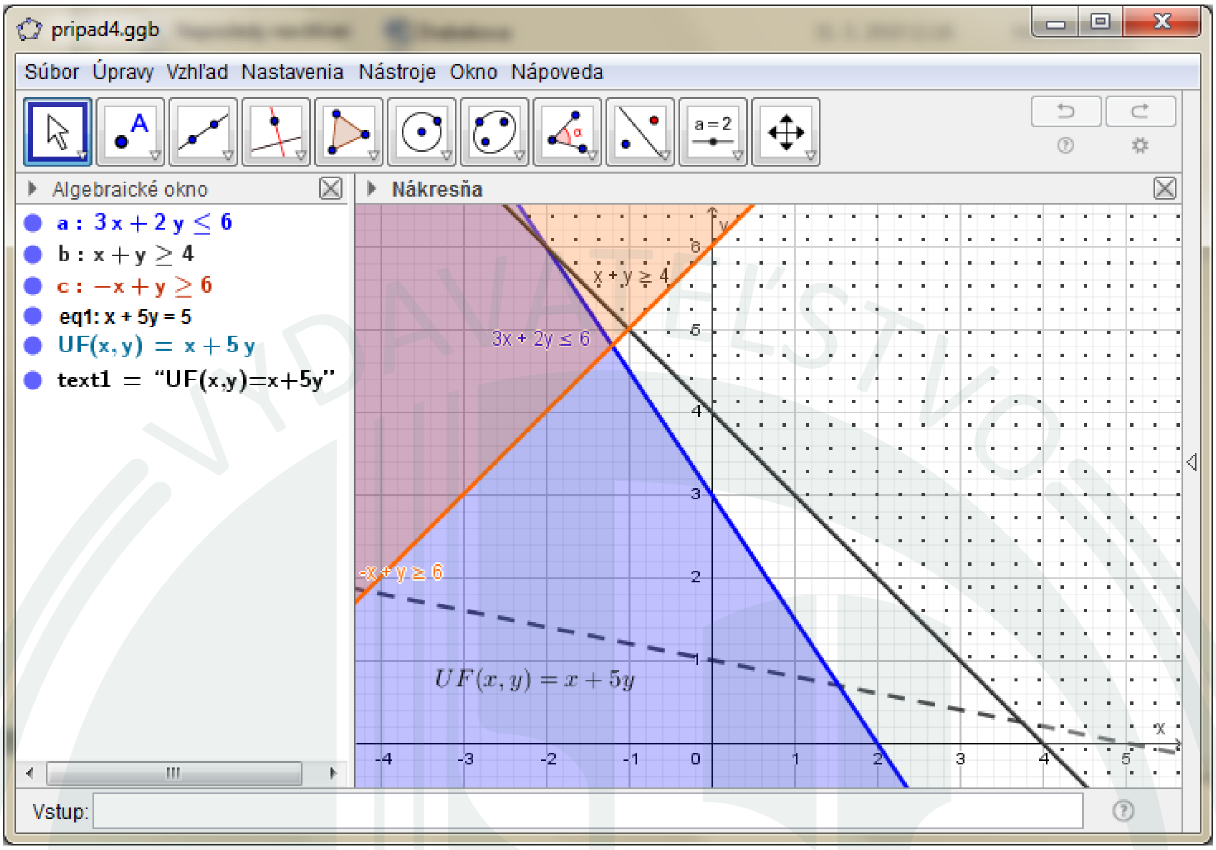
Nájdite optimálne prípustné riešenie pre nasledujúcu úlohu LP:

Účelová funkcia: $UF(x, y) = x + 5y \rightarrow$ maximum

Obmedzujúce podmienky: $\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 6 \\ x + y &\geq 4 \\ -x + y &\geq 6 \end{aligned}$

Podmienky nezápornosti: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Grafická ilustrácia riešenia sa nachádza na Obr.4. Vzhľadom na podmienky nezápornosti, je množina prípustných riešení prázdna. Oblasť, ktorá je riešením všetkých troch obmedzujúcich podmienok sa nenachádza v 1.kvadrante, pre jej body nie je splnená podmienka nezápornosti. Úloha teda nemá prípustné riešenia a ani optimálne riešenie.



Obr. 4

ZÁVER

Príspevok sa zaoberá grafickým znázornením riešenia úloh lineárneho programovania s dvoma rozhodovacími premennými. Aj keď prezentované modelové situácie sa nachádzajú v praxi zriedka, je potrebné venovať im pozornosť vzhľadom na vytváranie kognitívnych spojení medzi abstraktnou a názornou formou prezentácie daných problémov. Vizualizácia patrí totiž k základným kognitívnym stratégiám v tvorivosti a v schopnosti riešiť problémy v stanovených súvislostiach. Môžeme povedať, že softvér GeoGebra je vhodný na vizualizáciu skúmaných problémov, umožňuje hľadať nové prístupy k tvorbe ilustrácií a pomáha rozvíjať vizuálnu gramotnosť študentov. Lineárne programovanie ako kvantitatívny nástroj v manažérskom riadení podnikov má svoju nezastupiteľnú úlohu.

POĎAKOVANIE

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA 029SPU-4/2018 s názvom „*Digitálne edukačné aplikácie z matematiky*".

LITERATÚRA

[1] Berežný, Š. & Kravecová, D. (2012). *Lineárne programovanie*. 1.vyd. Košice: Technická univerzita v Košiciach, 108s. Dostupné 2019-05-25 na http://people.tuke.sk/daniela.kravecova/Linearne%20 programovanie.pdf

[2] Bočková, V. & Rumanová, L. (2018). Aplikačné a neštandardné matematické úlohy. In Zborník recenzovaných príspevkov: *Študentská vedecká konferencia 2018*. FPV UKF v Nitre, FPV UMB v Banskej

Bystrici, s. 398-404. Dostupné 2019-05-14 na https://konferencie.ukf.sk/public/conferences/10/2018/zbornik_SVK_2018.pdf

[3] Hrablik Chovanová, H. (2016). *Operačná analýza. Návody na cvičenia I*. Trnava: Materiálovotechnologická fakulta STU, 166s. Dostupné 2019-05-25 na https://www.researchgate.net/profile/Henrieta_Hrablik/publication/314123927_OPERACNA_ANALYZA_NAVODY_NA_CVICENIA_I/links/58b6c11545851591c5d52835/OPERACNA-ANALYZA-NAVODY-NA-CVICENIA-I.pdf

[4] Russell, R.S. & Taylor, B.W. (2011). *Operations Management. Creating Value Along The Supply Chain*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 834p. Retrieved 2016-05-09 from http://jtelen.free.fr/0MARINE%20bouquins/[Roberta_S._Russell,_Bernard_W._Taylor]_Operations(Bookos.org).pdf

[5] Šimková, M. (2001). *Optimálne programovanie*. 1.vyd. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre. 180s.

[6] Toma, V. (2008). *Základy lineárneho programovania*. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 68s. Dostupné 2019-05-29 na https://zona.fmph.uniba.sk/fileadmin/fmfi/sluzby/elektronicke_studijne_materialy/ip_uk/Zaklady_linerne_programovanie.pdf

GEOGEBRA AND GRAPHICAL SOLUTION OF LINEAR PROGRAMMING TASKS

ABSTRACT

Linear programming is one of the most widely used and powerful quantitative tools in operations management because it can be applied to a wide variety of different operational problems. Many decisions faced by an operations manager are centered around the best way to achieve the objectives of the firm subject to the constraints of the operating environment. The paper deals with graphical solution of linear programming tasks with two decision variables using software GeoGebra. The basic steps in the graphical solution method are to plot the model constraints on a set of coordinates in a plane and identify the area on the graph that satisfies all the constraints simultaneously. The point on the boundary of this space that maximizes or minimizes the objective function is the optimal solution. There may be three cases when searching for the feasible solution space. Visualization of applied problems gives you an idea about the optimization problem and makes it easier to understand the basic concept.

KEYWORDS: GeoGebra, graphical solution of inequalities, linear programming, economic-mathematical model

Kontaktná adresa
RNDr. Janka Drábeková, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu
Slovenská poľnohospodárska univerzita
Trieda A.Hlinku 2, 949 76 Nitra
E-mail: janka.drabekova@uniag.sk

Katedra matematiky

Univerzitné matematické vzdelávanie
ako základ pre inovácie vo vede a technike

HISTÓRIA, SÚČASNOSŤ A BUDÚCNOSŤ BIOMETRICKÝCH A BIOMATEMATICKÝCH METÓD VO VEDE A VÝSKUME

Pavel FĽAK, SK

ABSTRAKT

Biometrické a biomatematické metódy v pôdohospodárstve, v biológii ako aj v ostatných oboroch vedy a výskumu majú významnú úlohu pri vyhodnocovaní biologických experimentov. Komisie pre biometriku pri národných akadémiách pôdohospodárskych vied SR a ČR zohrali a zohrávajú významnú úlohu pri rozvoji vedy a výskumu našich republík. Stručný historický prehľad, súčasný stav, ale najmä námety a úlohy pre budúcnosť exploatácie matematicko-štatistických metód, biometriky a biomatematiky sú predmetom nielen odborných vedeckých diskusií pre rozvoj pôdohospodárskych vied, ale aj pre celospoločenský rozvoj.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: matematika, biometrika, biomatematika, pôdohospodárstvo, biológia, prírodné a spoločenské vedy

ÚVOD

Pojem biometrika, termíny Biometrics (biometrika), nie časopis Biometrika a Biometry (biometria) sú podľa International Biometric Society (IBS) používané už od začiatku 20. storočia pre odbor, resp. oblasť rozvoja štatistických a matematických metód aplikovaných na problémy analýzy údajov v biologických vedách. Z tohto hľadiska v príspevku prediskutujeme vznik, históriu, súčasnosť a aktuálne úlohy Komisie pre biometriku predsedníctva Slovenskej akadémie pôdohospodárskych vied (P-SAPV).

Komisie biometriky

Národné komisie biometriky ČAZV a SAPV majú svoj prvotný pôvod v Komisii biometriky ČSAZ, ktorá bola založená v šesťdesiatyh rokoch minulého storočia (1967) ako Komisia pre biometriku a pokusníctvo pri Komisii predsedníctva ČAZ pre technickú a metodickú modernizáciu. Komisia pre biometriku predsedníctva SAPV (KB P-SAPV) mala svoje ustanovujúce zasadanie 30. júna 1993. Iniciátormi vzniku KB P-SAPV boli: Ing. P. Fľak, DrSc. podpredseda Komisie biometriky ČSAZV, Doc. Ing. J. Husár, CSc., Ing. T. Miština, CSc. a Doc. Ing. J. Nový, CSc. Komise biometriky ORV ČAZV bola ustanovená 2. februára 1994.

Odborné zameranie KB P-SAPV

Komisia pre biometriku P-SAPV na základe svojho organizačného a rokovacieho poriadku rozvíja svoju činnosť v odboroch biomatematiky, biometriky, ekonometriky, výpočtovej techniky a ďalších príbuzných odboroch efektívne aplikovaných a iniciovaných v pôdohospodárskom výskume.

Hlavným poslaním komisie je:

- rozvíjanie tvorivej vedecko-výskumnej činnosti v uvedených odboroch, metodologické usmerňovanie aplikácie existujúcich metód a tvorba nových biomatematických a biometrických metód a programového zabezpečenia v pôdohospodárskom výskume na úrovni súčasných svetových poznatkov,
- organizácia vedeckých zasadnutí, prednášok, konzultácií a školení pre vedecko-výskumných, pedagogických, vedecko-technických pracovníkov, ako aj študentov univerzít, doktorandov a pracovníkov pôdohospodárskej praxe,
- rozširovanie nových vedecko-výskumných poznatkov z uvedených vedných odborov edičnou činnosťou v rámci Slovenskej republiky a v zahraničí,
- aktívna spolupráca so zahraničnými inštitúciami a vedeckými spoločnosťami na rôznych úrovniach (národných a zahraničných), ktoré sa zaoberajú problematikou uvedených vedných odborov,
- posudzovanie aplikácií moderných biomatematických metód vo vede, výskume a praxi, vypracovanie návrhov a riešení ich cieľavedomého využívania v pôdohospodárstve,
- získavanie grantov pre riešenie aktuálnych otázok pôdohospodárskeho výskumu a praxe modernými biomatematickými metódami.

Komisie biometriky sú teda v svojej podstate charakteristické viacodborovým zameraním, t.j. združujú vedeckých, vedecko-výskumných a pedagogických pracovníkov rôznych vedných odborov od matematiky, matematickej štatistiky, cez aplikovaných biometrikov tak poľného pokusníctva a šľachtenia rastlín, ako aj lesníctva, ekológie a životného prostredia, pracovníkov výskumu v živočíšnej výrobe a plemenitby hospodárskych zvierat (HZ) a samozrejme tiež pracovníkov oblastí ekonomiky pôdohospodárstva, ekonometriky, programátorov a špecialistov vo výpočtovej technike, ako aj ostatných odborov, v ktorých sa matematické a biometrické metódy aktívne používajú.

Spolupráca KB P-SAPV

Z úloh a poslania KB P-SAPV teda vyplýva aj spolupráca komisie s profesionálnymi spoločnosťami ako sú Jednota slovenských matematikov a fyzikov, Slovenská štatistická a demografická spoločnosť a spoločnosti biologického zamerania, akými boli napr. Slovenská spoločnosť pre poľnohospodárske, potravinárske, lesnícke a veterinárne vedy SAV, pod záštitou ktorej starší slovenskí členovia Komisie biometriky ČSAZ (vtedajší názov bol Komisia matematických metód a výpočtovej techniky) v rokoch 1972-1976 zorganizovali biometrické semináre pre celé Slovensko a v rokoch 1986-88 prednášky z biometrických metód pre vedeckých ašpirantov, vedecko-výskumných pracovníkov z rezortných ústavov MPaV SSR, ako aj vysokých škôl (Husár a Miština, 1980; Fľak a kol., Biometrické metódy, 1986-1988; VÚŽV Nitra Grofík a Fľak, 1990). Členovia komisie organizovali rad školení, akými boli napr. prednášky a praktické cvičenia z programovania v jazykoch Basic a Fortran IV (Husár, 1975) v spolupráci s Podnikom racionalizácie riadenia a výpočtovej techniky pri MPaV SSR, Okrem toho členovia KB P-SAPV spolupracovali s Biologickou spoločnosťou SAV, Bioklimatologickou spoločnosťou, Spoločnosťou G. Mendela, s Katedrou matematiky FEM SPU Nitra (Fľak, 1999-2019), kurz Biometrické metódy v biológii na SCPV Nitra (Fľak, 2008), ako aj ďalšími spoločnosťami formou prednášok na ich akciách. Okrem týchto akcií je potrebné spomenúť organizovanie seminára Biometrika a nové informačné technologie v pôdohospodárstve, SPU Nitra, prezentáciu predmetov biometrického a štatistického charakteru na FAPZ SPU Nitra (Candrák, 2011), či činnosť v rámci excelentného centra agrobiodiverzity v poľnohospodárstve FAPZ SPU (2012). Členovia komisie sa podieľali taktiež na akciách ICAR a Interbull (Paríž, 2010), XXIV. Genetické dni 2010 (Brno, ČR), EAAP a Interbull (2011). Je len samozrejmé, že členovia KB P-SAPV aplikujú biomatematické a biometrické metódy v príspevkoch v rôznych odborných časopisoch príslušných podľa vedných odborov SAPV.

Vzhľadom na dlhoročnú spoluprácu národných komisií biometriky ČAZV a SAPV, a v posledných rokoch najmä spoluprácou s Polskim Towarzystwom Biometrycznym (PTB Polska), k najdôležitejším aktivitám komisií patrí organizovanie letných škôl biometriky, z ktorých boli vydané zborníky referátov.

LETNÉ ŠKOLY BIOMETRIKY

Letné školy biometriky (LŠB) mali pôvodne školiace zameranie, hoci už v tomto období išlo v prevažnej väčšine škôl o systém prednášok/referátov jednak čisto biometrického, ale najmä prakticky aplikačného zamerania. Počiatok letných škôl sa datuje rokom 1970. Letné školy biometriky boli pôvodne organizované Katedrou biológie a genetiky PF UPJŠ v Košiciach (prof. RNDr. R. Hončariv, CSc.) a majú svoj základ na Slovensku, pričom prvých päť letných škôl sa konalo v rokoch 1970, 1973, 1976, 1979, a 1981. Ďalšie letné školy boli zamerané na teóriu a prax experimetálnej práce v biológii (VI. LŠB 1984, Račkova dolina), využitie matematických metód, biometriky a výpočtovej techniky v poľnohospodárstve - teória a výsledky výskumu (VII. LŠB 1986, Zemplínska Šírava), expeditívnym metódam biometrickej analýzy a možnostiam výpočtovej techniky (VIII. LŠB 1988, Poľný Kesov). Od roku 1990 sa letné školy organizovali v spolupráci s Komisiu biometriky ČAZV tak, že organizácia a programové zameranie škôl boli zosúladené na riešenie spoločných problémov využitia biometrických metód v pôdohospodárstve v ČR a SR s dôrazom na špecifické problémy pôsobenia komisií. Tak v roku 1990 letná škola bola zameraná na biometrickú analýzu a výpočtovú techniku v genetike šľachtenia a plemenárskej práci (IX. LŠB 1990, Lednice na Morave), ďalej na modelovanie biologických systémov (X. LŠB 1992, Račkova dolina), lineárne modely v poľnohospodárskom výskume a výrobe (XI. LŠB 1994, Lednice na Morave), biometrické metódy v pôdohospodárskom výskume (XII. LŠB 1966, Račkova dolina), biometrické metódy a modely v súčasnej vede a výskume (XIII. LŠB, Cikháj). Od roku 2000 letné školy boli organizované pod spoločnou témou Biometrické metódy a modely v pôdohospodárskej vede, výskume a výuke (XIV. LŠB, Račkova dolina, XV. LŠB 2002, Lednice na Morave, XVI. LŠB 2004, Račkova dolina, XVII. LŠB 2006, Lednice na Morave, XVIII. LŠB 2008, Račkova dolina a XIX. LŠB 2010, Lednice na Morave, XX. LŠB 2014 Slavonice, XXI. LŠB 2017, Karlov pod Pradědem).

Zamerania jednotlivých letných škôl od roku 1984 do roku 2000 boli podrobnejšie prediskutované v príspevku XIV. LŠB 2000 v Račkovej doline (Fľak, 2000 b). V stručnosti však môžeme uviesť, že príspevky boli cielené na oblasť modelovania biologických systémov, synergického modelovania v biológii, kritického systémového myslenia, či modely biologickej ekológie. V **oblasti rastlinnej výroby** išlo o poľné pokusníctvo (výber, pôdna úrodnosť, analýzy merania skladby a vývinu porastu, maloparcelkové pokusy, série, neúplné bloky, výkonnosť plodín, vplyvy rokov, modely rastu produkcie, tvorba úrody, biometrické metódy v RV), genetiku a šľachtenie (základné pojmy a metódy šľachtenia, kríženie, rast, dialelné plány, kombinovateľnosť, gény veľkých účinkov, komponenty fenotypového a genotypového rozptylu, ekogenetické modely, štruktúra úrodnosti, interakcia genotyp a prostredia (GE), opakovateľnosť, úsekové analýzy, fenomenologické modely interakcie G x E, selekcia, konkurentnosť). Ďalej to boli oblasti ekosystémov, agroekológie a prostredia (modely lesných ekosysémov, polutanti živých systémov, emisie, tvorba zrna, vzťahy porastu a prostredia, geografická unifikácia systémov, simulácie plynov, hydrobiológia, bioklimatológia, fotosyntéza, pohyb ťažkých kovov, závlahy). V oblasti ekonomiky, produkčných procesov, optimalizácie a simulácie to boli príspevky použiteľné v poľných pokusoch, ekológii, zamerané na ekonometricko-matematické metódy. Špecifickým problémom boli venované prednášky z výpočtovej techniky, najmä personálnym počítačom, softvérovému vybaveniu, ako aj špecifickým programom genetických zdrojov, databázam, informačným systémom, technologickým procesom, umelej inteligencii a pod. V **oblasti živočíšnej výroby** to boli príspevky zaoberajúce sa rastom organizmov a živočíchov (rastové funkcie a modely, fyziologické javy a procesy), výžive a kŕmeniu HZ (plánovanie a vyhodnocovanie pokusov, optimalizácia výživy zvierat), v genetike a plemenitbe zvierat (genetická štruktúra populácií HZ, genetika a modelovanie, lineárne modely, odhady komponentov rozptylu, lineárne modely odhadu genetickej hodnoty/plemennej hodnoty, interakcia genotypu a prostredia, selekcia zvierat, optimalizácia selekcie, fenogenetika). Ďalej to boli prednášky z **ekológie** a **prostredia**, biometrických metód použitých v ŽV (plánovanie pokusov, mnohorozmerné štatistické metódy), **produkčné modely**, modelovanie biologických procesov, počítačov a umelej inteligencie (softvér), optimalizácia väzieb rastlinnej a živočíšnej výroby.

Významnými boli prednášky z **matematicko-štatistických metód** (diagnostické metódy matematickej štatistiky, useknutý a cenzurovaný výber, funkcie príslušnosti, testy odľahlých pozorovaní/outlierov, vyvážené modely analýz rozptylu, testy aditivity, problémy dimenzie mnohorozmerných metód), **biometrických metód** (pokusné usporiadania, biometrické metódy v poľnohospodárstve), **biomatematických metód** (rovnovážne stavy oscilácie, populačná dynamika) **a výpočtovej techniky** (softvér a IBM PC, Statgraphics, SAS, SPSS, Unistat). Špecifickými problémami sa zaoberali prednášky zo systémovej a operačnej analýzy a lineárneho programovania. Samozrejme, že dôležitými príspevkami boli **prednášky o výučbe biometrických metód** na poľnohospodárskych univerzitách, ale taktiež prírodovedeckých fakultách univerzít v ČR a SR.

Letné školy biometriky v rokoch 2000 až 2017 boli zamerané na jubileá prof. RNDr. Ing. J. Roda, DrSc. a Prof. Ing. Š. Šmelku, DrSc., Ing. P. Fľaka, DrSc. a doc. RNDr. J. Michálka,CSc., na retrospektívu a budúcnosť biometriky vo vede a výskumu a v lesníckej vede, prehľad letných škôl biometriky, minulosť a budúcnosť a na úlohu Mendelea v rozvoji biometrického výskumu. Z teoretických štatistických príspevkov je potrebné spomenúť príspevok prof. A. Pázmana zameraný na úvahy o úlohe bayesovskej štatistiky v poznávaní a rozhodovaní, štatistickú analýzu plánovania experimentov, regresné problémy (logistika, časové rady) a spojité funkcie v systéme fuzzy rozhodovania. Významné boli príspevky **o lineárnych modeloch** (regresia a vážená MNŠ, zmiešané a zovšeobecnené lineárne modely, alfa design, experimentálne plány, modelovanie časových sérii). Z **mnohorozmerných štatistických metód** išlo o parametrickú a neparametrickú diskriminačnú analýzu, faktorovú a zhlukovú analýzu, profilové analýzy a analýzy tvaru, metódu hlavných komponentov a podparametrizované mnohorozmerné modely. Ďalej to boli ROC (Receiver Operating Characteristic Curve) krivky a ich využitie pri klasifikácii. Z **genetiky populácií** to boli príspevky odhadu genetických parametrov, regresné problémy a mnohorozmerné štatistické metódy v genetike populácií.

Z hľadiska **biometrických metód použitých v RV** to boli najmä biometrické metódy a modely usporiadania a hodnotenia pokusov (história poľného pokusníctva, testy poľných pokusov, metóda split-plot, Youdenov štvorec, neúplné bloky, neúplné bloky, alpha design, indexy kompetencie, medzidielcová konkurencia v poľných pokusoch, priestorové analýzy v odrodových pokusoch). Ďalej to boli metódy a modely genetiky a šľachtenia rastlín (experimenty typu line-tester, dialelné analýzy, analýzy GCA a heteróza, hodnotenie sérií odrodových pokusov, experimentálne plány testovania odrôd, expertný sytém Gaia, plánovanie faktoriálnych a blokových pokusov, genetické experimenty, aplikácie vybraných mnohorozmerných metód, diskriminačnej, faktorovej a zhlukovej analýzy, stabilita odrôd, kalibrácia a zmiešaná regresia, porovnanie hodnotenia údajov v šľachtení a testovaní odrôd rastlín, molekulárno-genetické markery a hodnotenie genetických zdrojov rastlín). Príspevky hodnotiace odrody ozimných pšeníc, jarného jačmeňa, jeho diverzity a genetickej diverzity záhradníckych plodín vhodne doplnili predchádzajúce práce.

Z **biometrických metód použitých v ŽV** je potrebné spomenúť lineárne modely v genetike a šľachtení zvierat, biometriku a biomatematiku v udržateľnej ŽV, spoľahlivosť odhadu náhodných efektov, výber vhodných modelov odhadu genetických parametrov, využitie metód toku génov. Ďalej sú to metódy odhadu genetickej/plemennej hodnoty, PH (výber vhodného modelu PH, Gibbs sampling, stochastická simulácia vplyvu referenčných plemenníkov a odhad PH, modelovanie efektov prostredia, Test Day model, odhad interakcie genotyp x prostredie, inbríding, laktačné krivky dojníc a oviec, metódy hodnotenia plodnosti HD, odhad PH u koní, neurónové siete a fuzzy c-zhlukovanie, bio-ekonomické prístupy hodnotenia produkčných systémov). Ďalej to boli analýzy prežitia (králiky), senzorická analýza potravín a metódy hodnotenia obsahu aminokyselín v kŕmnej zmesi. Z teoreticko-aplikačných metód **rastových analýz** je potrebné spomenúť viacrozmerný prístup hodnotenia rastu pomocou Potthof-Roy-ovho modelu. Z **humánnych analýz** to boli práce hodnotiace vzorky dychu pre detekcii rakoviny pľúc, analýza génov priebehu sepsie, glaukomové onemocnenie, mortalita, incidencia a prevalencia pacientov s nádorovými ochoreniami. Z kvalitatívnych metód práca zaoberajúca sa atribútom farby pri hodnotení biologického materiálu.

Z **ekologických problémov** boli zaujímavé príspevky modelov a modelovania ekosystémov v rámci rozvoja regiónu, odhady parametrov ekologického modelu, modelovanie biomasy frakcií v ekológii, zovšeobecnený aquatický model ekosystému a analýzy zrážkových úhrnov, regionálne klimatické zmeny. Významné boli **biometrické metódy a modelovanie v lesníckej ekológii**, geoštatistické metódy o lesnom prostredí, rastové stimulátory a informačné systémy v lesnom manažmente, využitie geograficky váženej regresie v lesníckych modeloch a štatistické hodnotenie rastových funkcií používaných v lesníctve. Z mnohorozmerných analýz to bolo použitie zhlukovej analýzy a z hľadiska prognózovania model SIBYLA rastu lesa.

Príspevky z **ekonomiky** a **ekonometriky** sa venovali produkčným modelom a procesom a ich ekonomickému hodnoteniu pri využití štatistických balíkov programov, napr. SASu, analýzam sezónneho kolísania ukazovateľov, realizácie produkcie v trhovom prostredí, hodnoteniu štruktúry výdavkov a skupín domácnosti, úrovni priemerných príjmov domácnosti, kauzalita produktivity práce, nákladov v štátoch EÚ, Markovové modely, a pod. Z **mnohorozmerných štatistických metód** boli prezentované lineárna a kvadratická diskriminácia v časových radoch cenových indexov, fuzzy zhluková analýza pri klasifikácii produkčných kmeňov, klasifikačné a regresné stromy. Zaujímavé boli príspevky zo štatistiky, matematických metód a matematických modelov v diele svetových ekonómov a v spoločenských vedách.

Z **použitia personálnych počítačov a softvéru** je potrebné spomenúť príspevky - knižnicu programov TSAM analýzy časových radov, využitie programu Statistica 6, analýzy údajov pomocou VARIOGRAMU v SASe, softvérov SAS Enterprise Guide a Mathematica, ako aj využitie PC pri spracovaní biometrických údajov a analýz v ŽV.

Z hľadiska výučby **biomatematiky a biometriky** na univerzitách boli prínosom príspevky: matematika ako komunikačný prostriedok, matematika - biometrika - genetika populácií - biotechnológie, poznámky k výučbe biomatematiky a biometriky na univerzitách, štúdium a využívanie biometrických metód a štatistiky univerzitnými študentmi najmä na ČZU v Prahe, využitie štatistiky na ITS Praha, výučba štatistiky na odbore informatika a použitie softvéru Statistica vo výučbe na ČZU v Prahe.

Záver z letných škôl. Prehľad rôznych príspevkov na doterajších letných školách môže do určitej miery zodpovedať otázku názvu letných škôl. Sú to školy alebo konferencie? Z množstva príspevkov možno dedukovať, že sú to školy, ktoré propagovali a zároveň umožnili využívať moderné biometrické metódy za použitia moderných PC a softvéru, samozrejme aj s prezentáciou moderných biometrických a biomatematických metód v pôdohospodárskej vede a výskume. Poznamenajme, že za typické školy, t.j. výučbu biometrických metód možno považovať hlavne aktivity členov Komise biometriky ČAZV a Komisie pre biometriku predsedníctva SAPV, ďalej kolegov matematických štatistikov z univerzít na rôznych školeniach, na výskumných pracoviskách ČR a SR, ako aj na univerzitách.

Budúcnosť organizovania letných škôl biometriky závisí na súčasných podmienkach rozvoja vedy a výskumu v pôdohospodárstve, kde sme svedkami nesebestačnosti poľnohospodárskej produkcie v podmienkach ČR a SR, na výučbe biometrických metód a záujme o nich novými vedeckými pracovníkmi na univerzitách či rezortných výskumných pracoviskách, z hľadiska celospoločenskej podpory rozvoja nielen pôdohospodárstva ale aj celého národného hospodárstva v našich podmienkach, krajín V4 a EÚ.

SÚČASNÝ STAV, RETROSPEKTÍVA A PERSPEKTÍVA

Matematika a riešenie biologických experimentov

V kontexte súčasného stavu využívania matematických poznatkov a matematicko-štatistických metód v pôdohospodárstve, resp. celospoločensky vo všetkých vedných oboroch, budeme sa v nasledovných riadkoch zaoberať úlohami matematiky pri riešení biologických experimentov metódami biomatematiky a biometriky.

Vzhľadom na existujúci nepriaznivý stav výučby matematiky na prírodovedných fakultách univerzít, ako aj na poľnohospodárskych univerzitách v SR a ČR z hľadiska potrebných matematických základov pri vysvetľovaní a pochopení biologických javov a procesov, ako aj ich modelovania nielen metódami biomatematiky a biometriky, sme v našich príspevkoch kriticky hodnotili rôzne novátorské prístupy vo výučbe, pričom sme poukázali na neprepojenie rôznych vedných disciplín pri výchove mladých odborníkov v biológii, ale najmä v poľnohospodárstve (Fľak, 2006).

Z pohľadu výučby matematiky na stredných školách a následne na vysokých školách pred rokom 1989 sa nám (odborníkom združeným v komisiách pre biometriku P-SAPV a ČAZV, prevažne laikom v oblasti výučby matematiky) javí, že prepojenie výučby medzi strednou a vysokou školou bolo komplexnejšie, pričom základné matematické poznatky získané na stredných školách umožňovali štúdium jednotlivých prírodných vied vyžadujúcich si matematické základy. Uvedomujeme si však, že aj v tomto období došlo k experimentovaniu pri výučbe matematiky od základných škôl (množinový prístup), cez stredné školy (napr. výučba diferenciálneho počtu) až po vysoké školy. Je možné, že to bolo spôsobené rôznymi myšlienkovými prúdmi, možno tiež ideologickými zásahmi do vyučovacieho procesu, avšak v podstate tieto zásahy boli koordinované v prospech komplexného vzdelávania v sfére prírodných vied. Myslíme si však, že hodnotenie vtedajšieho stavu patrí do kompetencie odborníkov matematikov a príbuzných prírodných vied, pre rozvoj ktorých sú matematické poznatky nevyhnutné.

V súčasnosti situácia vo vzdelávaní vzhľadom na akúsi „demokratizáciu slobody“ nielen politického prejavu je iná, často neprehľadná, rozmanitá a zdá sa neusmernená skutočnými odborníkmi, v tej ktorej vednej oblasti, čo je zrejme zapríčinené rôznymi faktormi a nedodržiavaním sľubov o rozvoji školstva ako hlavnej priority vedomostnej spoločnosti. To vyústilo napr. nielen k vzniku rôznych nových univerzít, ale tiež k vzniku rôznych fakúlt v rámci univerzít, pričom výučba matematiky a ostatných predmetov z oblasti prírodných vied nemôže byť postačujúca vzhľadom na jestvujúce ľudské zdroje. Nebudeme sa týmito otázkami podrobne zaoberať, keďže prislúchajú zodpovedným pracovníkom, tej ktorej univerzity či pracovníkom rezortu školstva a špecializovaným pedagogickým ústavom. Konštatujeme však z pohľadu odborníkov vedy a výskumu, t.j. užívateľov matematických poznatkov potrebných pri riešení vedecko-výskumných úloh v rastlinnej a živočíšnej výrobe, v ekológii, etológii, genetike a genetického inžinierstva, biotechnologických oblastí ako aj ekonomických problémov modernými matematickými a štatistickými metódami, že súčasný stav nie je optimálny a zdá sa oveľa horší ako v minulosti. O tom svedčia tiež veľmi časté a konkrétne kritické pripomienky na kvalitu a úroveň vysokoškolského vzdelávania známe z tlače či elektronických médií. Osobne na základe kontaktov s mladými adeptmi vedy, ašpirantami predtým a dnes s doktorandmi z SPU Nitra a UKF Nitra, ale aj z kontaktov so študentmi univerzít pri výučbe genetiky populácií (PrF UK, Bratislava) a modelovania biologických systémov a procesov (FPV UKF Nitra) prichádzame k nemilému záveru, že nielen pri výučbe matematiky a na ňu nadväzujúcich disciplín, ale tiež v oblasti špecifických biologických a poľnohospodárskych disciplín je porušená viazanosť a hierarchická postupnosť výučby od jednoduchšieho k zložitejšiemu. Redukcia výučby matematiky vo výchove mladej generácie na stredných školách samozrejme ovplyvnila aj vzdelávanie odborníkov na univerzitách. V súčasnosti začíname znova uvažovať o zavedení povinnej maturitne skúšky z matematiky.

Matematické a štatistické metódy v biológii

Vzhľadom k vyššie uvedeným poznámkam uvedieme stručne oblasti biologického bádania, v ktorých sa vyžadujú patričné poznatky z matematiky.

V našich príspevkoch sme diskutovali požiadavky na matematické poznatky pre **všeobecné metódy analýz biologických systémov**, ktoré sú nástrojmi rozboru komplexných biologických javov a procesov, ktoré nemožno skúmať a interpretovať bez zodpovedajúcej koncentrácie poznatkov z rôznych vedných disciplín, umožňujúcich zjednodušene popísať ich pôvod, súčasný a budúci stav, ako aj vývin bez využitia rozboru prístupných kvantitatívnych informácií pomocou adekvátnej tvorby matematických, biologicky opodstatnených modelov, teda bez **modelovania** a **simulácie** biologických systémov. Tieto analyticko-syntetické prístupy sú podstatnými pri postulovaní **matematického modelu**, ako výslednice analytického úsilia abstrahovať a definovať reálnu situáciu matematickými predpismi, teda modelovania či tvorby modelov, teda aktu konštrukcie reálnej situácie. Naproti tomu pod **simuláciou** v širšom slova zmysle sa chápe stav duplikácie podstaty systému (v biológii v podstate **otvoreného systému**), alebo aktivity v čase, resp. akúsi umelú reprezentáciu systému alebo aktivity. Poznamenajme, že principiálne rozlišujeme medzi **modelovaním deterministických** a **pravdepodobnostných biosystémov.**

Matematika z uvedených hľadísk je preto pre biológov prostriedkom tvorby modelov a manipulácie s nimi, umožňujúcim vyjadrenie zložitosti biologických javov a procesov, slúžiacimi pre popis a porozumenie biologických systémov. Podstatnými pre skúmanie biosystémov sú:

- **metódy algebraických a pravdepodobnostných prístupov konštrukcie biologických systémov** založených na poznaní základov z matematickej analýzy a najmä teórie pravdepodobnosti a metód matematickej štatistiky, a to tak jedno- ako aj mnohorozmerných štatistických analýz,

- **metódy identifikácie matematických modelov biosystémov** (analytický a empirický prístup tzv. čiernej skrinky matematického modelu systému, ako aj získavania údajov),
- **informačné metódy syntézy biologických systémov** (matematické základy informácie, miera informácie, entrópia, stochastické spracovanie informácie a jej prenos),
- **biokybernetika**, ako veda skúmajúca všeobecné zákony a procesy riadenia a prepojenia prirodzených a umelých biosystémov.

V štúdium analýzy a syntézy biologických systémov riadenia sa využívajú poznatky zo širokej palety súčasných poznatkov **analytického riadenia**, v biológii najmä adaptívnych biologických systémov.

Pri diskusiách o využití matematických a štatistických metód pri modelovaní v biológii a analýze experimentov sme sa v našich príspevkoch v minulosti zaoberali:
- minimálnymi poznatkami z matematiky – matematickým minimom,
- metódami teórie pravdepodobnosti, základmi matematickej štatistiky a úvodom do mnohorozmerných štatistických metód,
- matematickým modelovaním a simuláciou biologických systémov,
- modelmi rastu a vývinu organizmov a populácií,
- modelmi v genetike populácií, genetickom inžinierstve a biotechnológiách, ekológii a etológii.

V nasledovnej tabuľke (Tab. 1) sú uvedené požiadavky poznatkov z matematickej štatistiky potrebné pre štúdium metód genetiky populácií.

Tab. 1 *Porovnanie obsahového zamerania učebnice matematickej štatistiky a kvantitatívnej genetiky*

Anděl (1978)	Falconer (1960, 1985)
1. Náhodné veličiny	1. Genetická skladba populácie
2. Náhodné vektory	Selekčný index
3. Hustoty	Frekvencie génov a genotypov
4. Vety o maticiach	14. - 16. Inbreeding a kríženie I, II, III, Selekčný index
5. Normálne rozdelenie a	6. Spojitá premenlivosť, 7. Hodnoty a priemery
rozdelenia s ním súvisiace	8. Variancia (rozptyl)
6. Regresia	10. Dedivosť
7. Korelácia	9. Genetická príbuznosť, 19. Korelované vlastností
8. Lineárny model	10. Dedivosť, 11.- 13. Selekcia I, II, III
9. Analýza rozptylu	10. Dedivosť, 8. Variancia, komponenty rozptylu
10. Limitné vety	17. Škály, Rozdelenie a rozptyl, Interakcie
11. Testy dobrej zhody	2. Zmeny génovej frekvencie, Migrácia, Mutácia, Selekcia,
12. Kontingenčné tabuľky	3. 4. Malé populácie: zmeny génovej frekvencie ...
13. Prehľad najpoužívanejších neparametrických metód	18. Prahové vlastností
14. Testovanie hypotéz	Testy hypotéz o genetických parametroch
15. Odhad parametrov	10. Dedivosť, 19. Korelované vlastností
16. Bayesovské metódy	
17. Mnohorozmerná štatistická analýza	10. Korelované vlastnosti, selekčný index
18. Štatistické tabuľky	Tabuľky

Zdroj: Anděl, 1978 [1], Falconer, 1960 [2], vlastné spracovanie

Zmienili sme sa tiež o využití matematických metód a modelov v **medicíne** a **environmentalistike** (životnom prostredí) a stručne sme spomenuli problematiku **synergetického modelovania** v biológii a problémov **biokybernetiky**.

Pre rozvoj národného hospodárstva je veľmi dôležité využitie matematicko-štatistických metód v **ekonomických vedách**, špecificky v **ekonometrii.** Podobne možno konštatovať pre oblasť spoločenských vied, konkrétne v **sociológii** a **psychológii**.

DISKUSIA A NÁMETY

V rámci uvedených vedných disciplín a problematík sme v našich príspevkoch heslovite uviedli potrebné poznatky z rôznych oblastí matematiky a biomatematiky, štatistiky a biometriky, analýz biologických systémov, programovania a výpočtovej techniky, ako aj ďalších vedných odborov. Na základe diskutovaných problémov jednotlivých oblastí vyplynulo, že štúdium biomatematických metód a biometriky a ich aplikácií je nemysliteľné bez adekvátnych základov stredoškolskej matematiky, ako aj vysokoškolskej matematiky na fakultách univerzít biologického zamerania, pričom ich rozvoj je v súčasnosti úzko spätý s využívaním aktuálneho softvéru, ktorý často výskumní pracovníci využívajú veľmi šablónovite. Tento stav je zapríčinený najmä tým, že vedecko-výskumní ale aj pedagogickí pracovníci nie sú dostatočne vyzbrojení základnými poznatkami z teórie zakladania pokusov, nedokážu často správne formulovať výskumnú otázku, a teda ani plánovať biologický experiment, nieto ešte konštruovať aspoň jednoduchý lineárny model pre riešenie postulovaných hypotéz, a teda aj vybrať vhodnú optimálnu metódu analýzy získaných pokusných údajov, či postulovať správne závery na základe použitých matematicko-štatistických analýz. Je preto namieste položiť si otázku, ako danú situáciu riešiť, samozrejme nie globálne, ale špecificky v prospech rozvoja biologických disciplín na univerzitách i vedecko-výskumných inštitúciách, najmä rezortu poľnohospodárstva, ale aj iných rezortov.

Možnými riešeniami danej situácie by mohli byť:
- **prehodnotenie osnov výučby** matematiky, matematickej štatistiky či biometriky a prípadne biomatematiky v rámci fakúlt, ako aj medzi fakultami v prospech špecifického profilovania odborníkov, v tej ktorej oblasti,
- **špecifické štúdium a konzultácie** predmetných oblastí matematického vzdelávania pri zadávaní a riešení diplomových prác, ako aj zapojenia vynikajúcich študentov do riešenia vedecko-výskumných prác katedier fakúlt v spolupráci so špecializovanými katedrami, zaoberajúcimi sa predmetnou problematikou,
- **spolupráca univerzít** pri výchove študentov, ale aj adeptov vedy a výskumu **s vedeckými inštitúciami rezortu pôdohospodárstva a ústavmi SAV**,
- **spolupráca pri organizovaní vedecko-výskumných podujatí, seminárov a konferencií** medzi univerzitami a vedecko-výskumnými inštitúciami na Slovensku,
- ako aj **ďalšími inými aktivitami spolupráce univerzít a inštitúcií vedy a výskumu**, bez ohľadu na súčasný neuspokojivý stav, s cieľom výchovy odborne fundovaných absolventov univerzít a perspektívnych vedeckých pracovníkov.

Pre aktívne plnenie nami navrhovaných riešení, ako aj iných možností zvyšovania úrovne biologicko-matematicky fundovaných odborníkov, ktoré by vyplynuli z diskusie k tejto problematike sú členovia Komisie pre biometriku P - SAPV ale aj Komisie biometriky ČAZV pripravení aktívne spolupracovať s odborníkmi univerzít.

ZÁVER

Zložitosť biologických systémov či biologických problémov nemožno komplexne sledovať, študovať, riešiť a popísať bez adekvátnych matematických základov a tiež zodpovedajúcich biomatematických a biometrických poznatkov. Zvyšovanie úrovne vedecko-výkumných odborníkov, ale aj študentov a absolventov fakúlt prírodovedného zamerania, ktorí sa budú chcieť realizovať v praxi, najmä pri súčasnom búrlivom rozvoji moderných biotechnológii či genetického inžinierstva, je teda podmienené zvládnutím minimálnych základov matematiky, biomatematiky, biometriky a modelovania biologických javov a procesov. Pre pozitívne riešenie diskutovaných problémov odporúčame zintenzívniť spoluprácu medzi pracoviskami univerzít, vedecko-výskumných inštitúcií rezortu pôdohospodárstva a ústavmi SAV.

LITERATÚRA

Knižné publikácie

[1] Anděl, J.: Matematická statistika, SNTL Praha - ALFA Bratislava, 1978, 352 s, 4 obr., 68 tab., 04-017-78.

[2] Falconer, D.S.: Introduction to Quantitative Genetics, Longman, London and New York, 1960, 1981, ruský preklad: Agropromizdat , Moskva, 1985, 486 s.

[3] Grofík, R. - Fľak, P.: Štatistické metódy v poľnohospodárstve. Príroda, 1990, 344 s., ISBN 80-07-00018-6.

[4] Husár, J.: FORTRAN pre výskumných pracovníkov v poľnohospodárstve. 1975, Ministerstvo poľnohospodárstva a výživy SSR, Bratislava, 294 s.

[5] Husár, J. - Miština, T.: Vybrané štatistické metódy pre vyhodnocovanie pokusov. 1980, Výskumný ústav závlahového hospodárstva, Bratislava, Výskumný ústav rastlinnej výroby, Piešťany, 143 s., 7 príloh.

Vedecké publikácie a populárno-vedecké príspevky

[6] Fľak, P.: Matematické metódy hodnotenia ukazovateľov správania sa hospodárskych zvierat. 1. celoštátny seminár k etológii aplikovanej v zootechnike hospodárskych zvierat 27. - 28. 11. 1979, VÚŽV Nitra. Zborník referátov Etológia a jej uplatnenie pri prechode na priemyselné formy chovu hospodárskych zvierat. VÚŽV-ČSVTS, 1979, s. 46-51.

[7] Fľak, P.: Biometricko-genetické aspekty hodnotenia biotechnológii. In Zborník Biometrická genetika a systémová analýza v živočíšnej výrobe. Skalský dvůr, 29. - 30. 11. 1988, VTS PEF VŠZ Brno, 1988, s. 48-65.

[8] Fľak, P.: Biologická a genetická determinácia rastu zvierat. Doktorská dizertačná práca. VÚŽV Nitra, 1990. 485 s.

[9] Fľak, P.: Princípy modelovania a simulácie biosystémov a ich aplikácie v zootechnickom výskume. In Zborník Modelovanie biologických systémov, X. letná škola biometriky, Račkova dolina 8. - 12. 6. 1992, ZS VTS VÚŽV Nitra, ES VŠP Nitra, 1992, s. 125-141.

[10] Fľak, P.: Štatistické metódy v bioklimatológii. Zborník prác z Bioklimatických pracovných dní Bioklimatológia a zmeny klímy. I. Technická bioklimatológia. 22. - 23. 11. 1995 v Nitre. Slovenská bioklimatologická spoločnosť SAV Bratislava, Katedra biometeorológie a hydrológie FZKI VŠP Nitra, Katedra meteorológie a klimatológie MFF UK Bratislava, VÚŽV Nitra, Štátna veterinárna správa SR Bratislava. 1996, s. 69-73. ISBN 80-7148-012-6.

[11] Fľak, P.: Matematika v biometrike a biomatematike. Zborník vedeckých prác zo seminára na Katedre matematiky SPU Aplikácia matematiky vo výučbe, výskume a praxi. SPU FEM, ES SPU, Nitra, 1998, s. 28-32. ISBN 80-7137-565-9.

[12] Fľak, P.: Metódy matematickej biológie. Zborník vedeckých prác zo seminára na Katedre matematiky SPU Obsah a metódy výučby matematiky a jej aplikácie v inžinierskych odboroch. SPU FEM, VES SPU, Nitra, 1999, s. 11-16. ISBN 80-7137-650-7.

[13] Fľak, P.: Matematické aspekty modelovania a hodnotenia rastu organizmov. Zborník Úloha a postavenie matematiky medzi inými vednými disciplínami. Katedra matematiky, FEM SPU, Nitra, 2000, s. 77-80. ISBN 80-7137-781-3.

[14] Fľak, P.: Modelovanie a hodnotenie rastu organizmov pomocou alometrickej funkcie $y = bx^a$. Zborník Nové trendy vo výučbe matematiky. Katedra matematiky, FEM SPU, Nitra, 2001, s. 24-29. ISBN 80-7137-953-0.

[15] Fľak, P.: Linear models in populations genetics. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica 9, 2001, 3-20.

[16] Fľak, P.: Matematické a štatistické metódy genetiky populácií. Zborník vedeckých prác z medzinárodnej konferencie Matematika vo výučbe, výskume a praxi 2002, Katedra matematiky, FEM SPU Nitra, 11. jún 2002, s. 138-143. ISBN 80-8069-040-5.

[17] Fľak, P.: Regression methods of estimating of genetic parameters. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica 11, 2002, 29-52.

[18] Fľak, P.: Matematicko-štatistické metódy alometrického rastu. Zborník Matematika vo výučbe, výskume a praxi 2003. Katedra matematiky, FEM SPU, Nitra, 2003, s. 152-159. ISBN 80-8069-203-3.

[19] Fľak, P.: Matematicko-štatistické metódy viacrozmerného alometrického rastu. In CD: Zborník vedeckých prác z medzinárodnej vedeckej konferencie Matematika vo výučbe, výskume a praxi 2004. Katedra matematiky, FEM SPU, Nitra, 26. máj 2004, s. 51-56. ISBN 80-8069-371-4.

[20] Fľak, P.: Analysis of variance method problems of estimation of genetic parameters. Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykianae Brunensis, Mathematica 12, 2004, 95-114.

[21] Fľak, P.: Biometrika a biomatematika v udržateľnej živočíšnej výrobe. In Zborník referátov XVI. letná škola biometriky Biometrické metódy a modely v pôdohospodárskej vede, výskume a výučbe, Račkova dolina 21. – 25. júna 2004, A-SAPV, VES SPU Nitra, 2004a, s. 11-18. ISBN 80-89162-06-1

[22] Fľak, P.: Význam a postavenie matematicko-štatistických metód v udržateľnom poľnohospodárstve. In Zborník 12. slovenská štatistická konferencia Štatistika a integrácia, Slovenská štatistická a demografická spoločnosť. Bardejovské kúpele, 4. - 6. 10. 2004, 2004b, s. 186-195. ISBN 80-88946-37-9.

[23] Fľak, P.: Matematické a štatistické metódy modelovania v biológii. In CD: Zborník vedeckých prác z 5. medzinárodnej konferencie Aktuálne trendy v matematickom vzdelávaní po vstupe do Európskej únie, Katedra matematiky, FEM, SPU Nitra, 2. - 3. júla 2005, s. 54-62. ISBN 80-8069-549-0.

[24] Fľak, P.: Mnohorozmerné štatistické metódy v genetike populácií. In CD: Zborník vedeckých prác zo seminára s medzinárodnou účasťou Matematika a jej aplikácie v inžinierskom vzdelávaní, Katedra matematiky, FEM SPU, Nitra, 2. júna 2006, s. 51-60. ISBN 80-8069-708-6

[25] Fľak, P.: Poznámky k výučbe biomatematiky a biometriky na univerzitách. Sborník referátů XVII. letní školy biometriky, Biometrické metody a modely v současné vědě a výzkumu, Lednice, 21. 8. - 25. 8. 2006, ÚKZÚZ Brno, Brno 2006, s. 125-128. ISBN 80-86548-89-9.

[26] Fľak, P.: História a činnosť Komisie pre biometriku P-SAPV, kap. 11.2. In: 90 rokov pôdohospodárskych vied na Slovensku 1924-2014. Kolektív autorov, SAPV Nitra, 2014, s.64-70. ISBN 978-80-89162-61-1.

HISTORY, PRESENT AND FUTURE OF BIOMETRIC AND BIO-MATHEMATICS METHODS IN SCIENCE AND RESEARCH

ABSTRACT

Biometrics and biomathematics applied in agricultural sciences, biology and other regions of sciences have an important role for evaluation of biological experiments. The Commissions of Biometrics of the Slovak Academy and the Czech Academy of Agricultural Sciences have a significant role for development of agricultural sciences in our countries. The brief historical review, present state, but mainly the topics and roles for a future exploitation of mathematical and statistical methods, biometrics and biomathematics are subject not only of the expert's scientific discussions for agricultural sciences development, but also for integral development of human society.

KEY WORDS: mathematics, biometrics, biomathematics, agriculture, biology, natural and society sciences

Kontaktná adresa
Ing. Pavel Fľak, DrSc.,
Slovenská akadémia pôdohospodárskych vied, Komisia pre biometriku P-SAPV,
Hlohovská 2, 949 92 Nitra - Lužianky
e-mail: flakpavel@gmail.com

Katedra matematiky

Univerzitné matematické vzdelávanie ako základ pre inovácie vo vede a technike

FINANČNÁ A POISTNÁ MATEMATIKA AKO SÚČASŤ MATEMATICKÉHO UNIVERZITNÉHO VZDELÁVANIA

Radomíra Hornyák Gregáňová, SK

ABSTRAKT

Príspevok sa zaoberá vyučovaním matematiky a jej aplikácií v rámci predmetov vyučovaných na bakalárskom stupni štúdia na Fakulte ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity (FEM SPU) v Nitre. Je tu poukázané na potrebu osvojenia si matematického aparátu a na následné aplikácie matematiky vo finančnej a poistnej praxi v predmete Finančná a poistná matematika, ktorý je súčasťou bakalárskeho štúdia na univerzite poľnohospodárskeho zamerania. Zaradenie predmetu Finančná a poistná matematika do kontextu vzdelávania na FEM SPU v Nitre umožní vybudovať komplexnejšie pripravených absolventov do praxe. Cieľom príspevku je analýza a vyhodnotenie študijných výsledkov študentov v predmete Finančná a poistná matematika vyučovanom v 3. ročníku bakalárskeho štúdia na FEM SPU v Nitre v akademických rokoch 2010/11 - 2017/18. Analýza študijných výsledkov v uvedenom predmete je vykonaná vybranými metódami matematickej štatistiky.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: matematika, matematický aparát, aplikácie, finančná a poistná matematika

ÚVOD

Univerzity neustále hľadajú možnosti ako prilákať študentov, ako ponúkať kvalitné vzdelávanie a ako priniesť pridanú hodnotu a diferenciáciu vo vysokoškolskom vzdelávaní. Konkurenčné prostredie okolo nás vytvára potrebu kvalitných, nekonvenčných a inovatívnych riešení v oblasti vysokoškolského vzdelávania [3].

Kvalita vysokoškolského vzdelávania a zvyšujúca sa konkurencieschopnosť vysokých škôl sú podmienené neustálou aktualizáciou akademického obsahu v závislosti s požiadavkami na absolventov vysokých škôl na trhu práce [5].

Vedomosti nadobudnuté štúdiom na FEM SPU v Nitre absolventi využijú aj pri obchodovaní s rôznymi komoditami na zahraničných trhoch nielen v Slovenskej republike, ale aj v rámci ostatných krajín Európskej únie [8].

V súčasnej modernej dobe, po ukončení štúdia, by študenti mali mať nielen dostatočné množstvo získaných nových poznatkov, ale mali by tiež získať ekonomické a finančné zručnosti, ktoré budú potrebovať v každej oblasti práce. Je dôležité pripraviť študentov nielen s dobrými znalosťami, ale aj s dostatočnými praktickými zručnosťami a zručnosťami, vďaka ktorým nájdu vhodné zamestnanie v profesionálnom živote [4].

Ekonómia, finančníctvo, poisťovníctvo, a iné využívajú nielen základné elementárne matematické operácie, ale aj vedomosti z vyššej matematiky, ako sú vlastnosti funkcie jednej reálnej premennej, diferenciálny a integrálny počet. Preto práve vhodným výberom príkladov je potrebné a dôležité poukázať na možnosti aplikácií aj v iných oblastiach a v ďalšom štúdiu. Vhodné ekonomické aplikácie s využitím matematického aparátu prispejú ku komplexne vybudovanej osobnosti absolventov FEM pripravených pre prax [7].

Metódy finančnej matematiky možno aplikovať v mnohých ekonomických odvetviach. Účtovníctvo, finančné plánovanie a rozhodovanie je súčasťou mnohých odborných kurzov a špecializovaných predmetov [1].

Absolventi I. stupňa vzdelávania na FEM SPU v Nitre sú pripravovaní pre rôzne ekonomické oblasti hospodárstva a poľnohospodárstva. Vedomosti získané v jednotlivých odboroch a jazykové kompetencie vytvárajú absolventom FEM široké možnosti uplatnenia na rôznych stupňoch riadenia podnikov agropotravinárskeho rezortu, v podnikoch biologických a technických služieb, v podnikateľských subjektoch zahraničného obchodu, ako aj v obchodných oddeleniach podnikov agrorezortu a vo finančných inštitúciách. Študenti sú vzdelávaní aj pre potreby inštitúcií verejnej správy a samosprávy, pre prácu v konzultačných firmách, vo výskumných pracoviskách a v školstve [6].

MATERIÁL A METÓDY

Na Fakulte ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity (FEM SPU) v Nitre je matematika na bakalárskom stupni štúdia vyučovaná vo všetkých odboroch. Je vyučovaná v nasledujúcom rozsahu a výmere hodín týždenne (Tab. 1):

Tab. 1 Vyučovanie predmetu matematika na jednotlivých odboroch FEM SPU v Nitre

Názov predmetu	Rozsah	Odbor
Mathematika IA, IB (Mathematics IA, IB)	2 semestre	Ekonomika podniku, Manažment podniku, Ekonomika a manažment agrosektoru, Obchodné podnikanie, International business with agrarian commodities, Účtovníctvo, Kvantitatívne metódy v ekonómii
Finančná a poistná matematika	1 semester	Účtovníctvo, Kvantitatívne metódy v ekonómii, Ekonomika podniku

Na FEM SPU v Nitre je dôležitou úlohou matematiky naučiť študentov základné poznatky z vyššej matematiky a poukázať aj na možnosti aplikovania matematického aparátu v profilových ekonomických predmetoch a v praxi. Ekonomické a manažérske zameranie FEM stanovuje smerovanie a orientáciu aplikácií vo výučbe matematiky. Matematický aparát je budovaný prísne logicky, jednotlivé pojmy na seba nadväzujú a nie je možné pochopiť ich bez príslušného základu. Preto je veľmi dôležité, aby už študent zo strednej školy mal vybudovaný potrebný základ matematických vedomostí nadobudnutých na strednej škole, na ktoré je možné nadviazať na univerzite [2].

Študenti FEM absolvujú matematiku počas dvoch semestrov, ktorá im poskytne potrebné vedomosti zo základov vyššej matematiky. Po osvojení si dôležitých základných vedomostí z vyššej matematiky budú môcť študenti aplikovať matematický aparát v ekonomických a finančných oblastiach. Po absolvovaní povinných predmetov v 1. ročníku bakalárskeho štúdia majú študenti niektorých študijných odborov, možnosť zvoliť si voliteľný predmet s aplikáciami matematického aparátu vo finančnej a poistnej praxi. Cieľom výučby povinných a voliteľných predmetov z matematiky na SPU v Nitre je naučiť študentov matematické prostriedky a metódy na riešenie ekonomických a finančných úloh. Aplikácia matematických metód v praxi spája v sebe zvládnutie teoretického základu matematiky a jej použitie pri riešení konkrétnych problémov v rôznych aplikačných oblastiach. Po úspešnom zvládnutí „základného kurzu z matematiky“ zameraného na vyššiu matematiku je študent schopný niektoré ekonomické problémy riešiť práve s použitím vhodného matematického aparátu [2].

Základné poznatky z vyššej matematiky študent získa absolvovaním povinných predmetov Matematika IA, IB v 1. ročníku bakalárskeho štúdia. Uvedené predmety poskytujú základný kurz vyššej matematiky s ukážkami aplikácií v odborných predmetoch. V 3. ročníku bakalárskeho štúdia na FEM je vyučovaný predmet Finančná a poistná matematika, ktorej súčasťou sú základy finančnej a poistnej matematiky. Tento predmet je poskytovaný pre akreditované študijné programy Kvantitatívne metódy v ekonómii ako povinný predmet a pre Účtovníctvo a Ekonomiku podniku ako povinne voliteľný predmet. Finančná matematika poskytuje vhodné aplikácie matematiky vo finančnej oblasti a poistná matematika analogicky poskytuje aplikácie matematiky v poistnej praxi. Znalosti z finančnej matematiky umožňujú pri požičiavaní alebo investovaní finančných prostriedkov efektívnejší a racionálnejší spôsob ich použitia. Poznatky a metódy je možné uplatniť nielen v rámci pracovných rozhodnutí, ale aj v súkromnom rozhodovaní o zhodnotení financií. Poistná matematika poskytuje lepšiu orientáciu sa v poistných produktoch, v možnostiach a druhoch poistení a v poistnej praxi všeobecne.

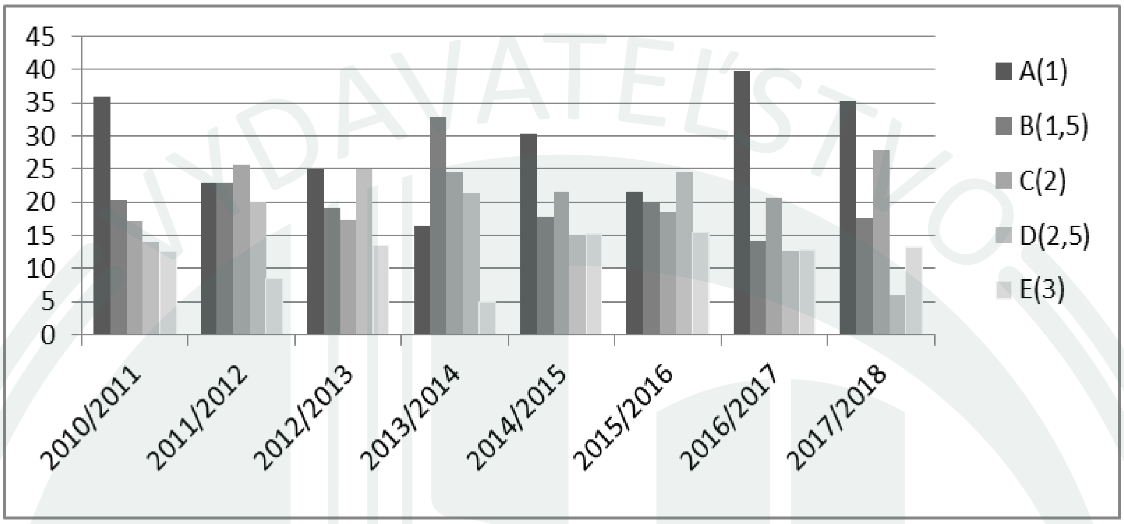
Vo finančnej matematike sú zahrnuté tieto okruhy:
- jednoduché úrokovanie,
- zložené úrokovanie,
- princíp finančnej ekvivalencie,
- spojité úrokovanie,
- rentový a umorovací počet.

V poistnej matematike sú zahrnuté tieto okruhy:
- netto poistné v poistení osôb,
- všeobecnejšia formulácia úlohy poistenia,
- brutto poistné,
- poistná rezerva v životnom poistení.

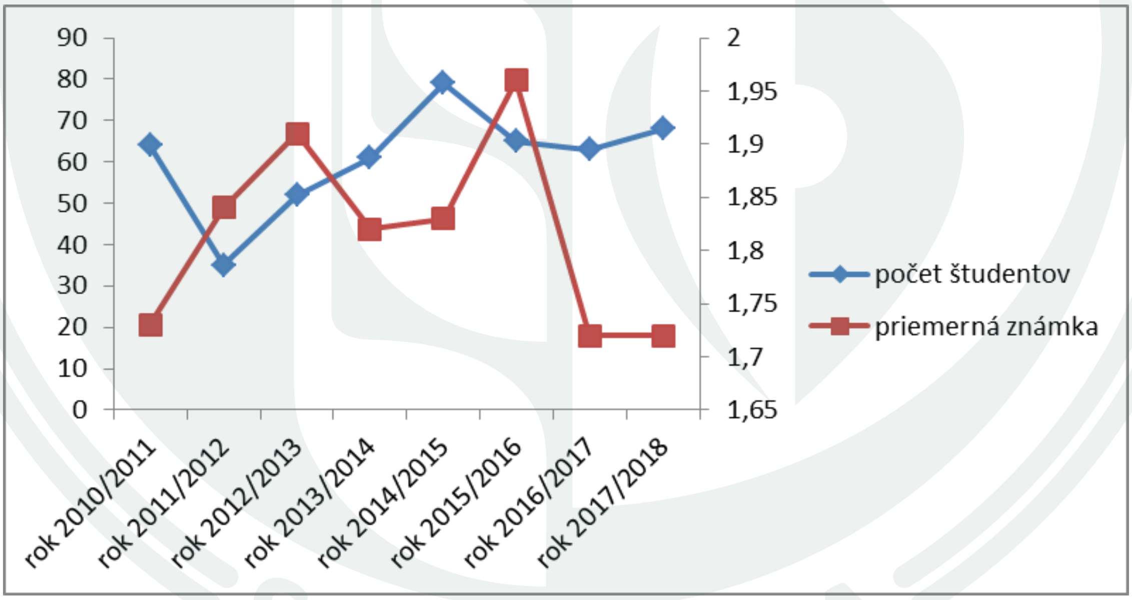
Zaradením aplikácií do výučby a vyučovaním voliteľných predmetov zameraných na ekonomické aplikácie matematického aparátu sa vyučovací proces skvalitní a zvýši sa vedomostná úroveň študentov [2].

VÝSLEDKY A DISKUSIA

V nasledujúcej časti uvádzame študijné výsledky v predmete Finančná a poistná matematika pre študijné programy Účtovníctvo a Kvantitatívne metódy v ekonómii v akademických rokoch 2010/2011, 2011/2012, 2012/2013, 2013/14, 2014/15, 2015/16, 2016/17 a 2017/18. Študenti absolvujú v 1. ročníku bakalárskeho štúdia povinné predmety Matematika IA v zimnom semestri a predmet Matematika IB v letnom semestri. Predmet Finančná a poistná matematika študenti denného štúdia absolvujú v letnom semestri 3. ročníka bakalárskeho štúdia ako predmet, kde je potrebné aplikovať získané vedomosti z 1. ročníka vo finančnej a poistnej matematike. Uvedený predmet má nasledujúci systém hodnotenia: počas semestra píšu študenti jeden priebežný test, odovzdávajú seminárnu prácu (za tieto aktivity môžu získať 50 bodov) a následne absolvujú skúšku vo forme písomného testu za 50 bodov. Výsledky skúšok sú hodnotené štandardnou stupnicou A(1), B(1,5), C(2), D(2,5), E(3), FX(4). Študenti externého štúdia študijného programu Účtovníctvo majú možnosť absolvovať predmet Finančná a poistná matematika v letnom semestri 2. ročníka bakalárskeho štúdia na FEM SPU v Nitre.



Obr. 1 Grafické znázornenie študijných výsledkov v % v predmete Finančná a poistná matematika počas rokov 2010/11 - 2017/18
Zdroj: vlastné výpočty



Obr. 2 Grafické znázornenie priemerných známok a počtov študentov v predmete Finančná a poistná matematika počas rokov 2010/11 - 2017/18
Zdroj: vlastné výpočty

Na obrázkoch 1 a 2 sú uvedené výsledné známky na skúške a priemerné známky z predmetu Finančná a poistná matematika počas rokov 2010/11 - 2017/18, pričom sme brali do úvahy študentov v dennej aj externej forme štúdia. Údaj o počte študentov vyjadruje, koľko študentov predmet ukončilo v danom akademickom roku. Pri výpočte priemernej známky sme nebrali do úvahy tých študentov, ktorí predmet neukončili (percento neukončených je v intervale 5 až 10 percent). Na základe priemerných známok v predmete Finančná a poistná matematika môžeme konštatovať strednú úroveň vedomostí študentov v uvedenom predmete (priemerné známky sú v rozpätí medzi 1,72 až 1,96). Študenti sú absolventi rôznych typov stredných škôl a majú rôznorodý rozsah matematických vedomostí, čo ovplyvňuje aj výsledky zo skúšky. Predmet Finančná a poistná matematika je študentmi považovaný za jednoduchší v porovnaní s predmetmi Matematika IA a Matematika IB, preto študenti vo všeobecnosti dosahujú v predmete Finančná a poistná matematika lepšie študijné výsledky ako v predmetoch Matematika IA a Matematika IB. Vyhodnotenie a grafické znázornenie študijných výsledkov v % v predmete Finančná a poistná matematika počas rokov 2010/11 – 2017/18 je uvedené na obrázku 1. Grafické znázornenie priemerných známok a počtov študentov v predmete Finančná a poistná matematika počas rokov 2010/11 - 2017/18 je uvedené na obrázku 2. Počet študentov, ktorí každoročne absolvujú uvedený predmet sa pohybuje medzi 52 až 79, s výnimkou akademického roka 2011/12, kedy predmet absolvovalo len 35 študentov. Grafické znázornenia boli uskutočnené pomocou programu Microsoft Excel.

ZÁVER

Všeobecný teoretický základ v rámci prvých ročníkov bakalárskeho stupňa štúdia je súčasťou vysokoškolského vzdelávacieho systému na Slovensku. Odborné štúdium s aplikáciami je zas súčasťou štúdia počas vyšších ročníkov bakalárskeho štúdia a počas inžinierskeho štúdia. Implementáciou vhodných aplikácií z matematiky do vyučovacieho procesu na univerzitách a vyučovaním voliteľných predmetov zameraných na aplikácie matematického aparátu je možné skvalitniť vyučovací proces, zvýšiť vedomostnú úroveň študentov a pomôcť tým študentom lepšie sa uplatniť na trhu práce po absolvovaní bakalárskeho štúdia. Finančná a poistná matematika je práve predmetom, ktorý umožňuje získať zručnosti a vedomosti potrebné pri riešení problémov a úloh vo finančnej a poistnej praxi. Vyhodnotenie študijných výsledkov študentov a počtu študentov v predmete Finančná a poistná matematika vyučovanom v 3. ročníku bakalárskeho štúdia na FEM SPU v Nitre v akademických rokoch 2010/11 - 2017/18 je tiež dôkazom toho, že študenti dosahujú v predmete dobré výsledky a predmet považujú za jednoduchší a prospešnejší do života oproti všeobecnejším matematickým predmetov, ktoré absolvovali v 1. ročníku bakalárskeho štúdia na FEM SPU v Nitre. Študenti absolvovaním aplikačných predmetov už počas bakalárskeho štúdia získajú lepšie možnosti uplatnenia sa v odbornej praxi, či už vo finančnej, poistnej alebo ekonomickej sfére ich ďalšieho pôsobenia už po získaní bakalárskeho titulu a vzdelania na univerzite.

POĎAKOVANIE

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA 029SPU-4/2018: „Digitálne edukačné aplikácie v matematike“.

LITERATÚRA

[1] Ferenczi Vaňová, A., Krajčírová, R., Váryová, I. & Košovská, I. (2015). Depreciation influence of fixed assets on accounting result and corporate income tax base pursuant accounting and tax legislation in the Slovak Republic. In Finance and performance of firms in science, education and practice. Zlín: Tomas Bata University in Zlín, pp. 287-296. Retrieved 2019-05-07 from: http://www.ufu.utb.cz/konference/sbornik2015.pdf.

[2] Hornyák Gregáňová, R. (2017). Financial and insurance mathematics in the context of economic and managerial university education. In ICERI 2017. Valencia : IATED. s. 7450--7455.

[3] Horská, E., Ubrežiová, I. & Palková, Z. (2015). Quality and value related aspects of the higher education: a case of the Slovak University of Agriculture in Nitra. In Development of Public Accreditation of Agricultural

programs in Russia (PACAgro) (543902-TEMPUS-1-2013-1-SK-TEMPUS-SMGR). Retrieved 2019-05-07 from http://spbgau.ru/files/nid/3515/sbornik_tempus_2015.pdf.

[4] Hudáková, J. & Papcunová, V. (2019). Project Training Company in Slovak Republic. In 4th International Conference on Education Science and Development (ICESD 2019). Dostupné 2019-05-07 na: DOI 10.12783/dtssehs/icesd2019/28063.

[5] Matušek, V., Drábeková, J., Országhová, D. & Farkašová, M. (2016). Mathematical competences as a part of educational objectives in economical and technical study programs. In The agri-food value chain: challenges for natural resources management and society: International scientific days 2016. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, s. 628-633. Dostupné 2019-05-07 na: http://dx.doi.org/10.15414/isd2016.s8.08.

[6] Országhová, D. (2012). Význam a úloha matematiky vo vzdelávaní budúcich ekonómov, manažérov a podnikateľov. In Podnikanie v SR a v EÚ. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, s. 87-92. Dostupné 2019-05-07 na: http://www.slpk.sk/eldo/2013/zborniky/014-13/orszaghova.pdf.

[7] Országhová, D. & Gregáňová, R. (2012). Financial mathematics - theoretical and practical aspects. In Global commodity markets: new challenges and the role of policy: International Scientific Days 2012. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, s. 864-889.

[8] Pietriková, M., Matejková, E. & Qineti, A. (2014). The development of competitiveness of a selected agrifood commodity in V4 Countries. In Improving performance of agriculture and the economy: challenges for management and policy: international scientific days 2014: 13th international conference. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, s. 269-275. Dostupné 2019-05-07 na: http://spu.fem.uniag.sk/fem/mvd2014/proceedings/articles/Pietrikova.pdf.

FINANCIAL AND INSURANCE MATHEMATICS AS A PART OF MATHEMATICAL UNIVERSITY EDUCATION

ABSTRACT

The paper deals with the teaching of mathematics and its applications in bachelor study at the Faculty of Economics and Management of The Slovak University of Agriculture (FEM SUA) in Nitra. The need of acquiring of the mathematical apparatus and its subsequent utilization in financial and insurance practice is included in subject Financial and insurance mathematics. This subject is part of bachelor study at agricultural oriented university. The inclusion of the subject Financial and insurance mathematics into context of education at FEM SUA in Nitra will build more complex prepared graduates to practice. The aim of this paper is the analysis and evaluation of the students' study outcomes in subject Financial and insurance mathematics taught in the third year of bachelor study at FEM SPU in Nitra in the academic years 2010/11 - 2017/18. The analysis of study outcomes in abovementioned subject is carried out by selected methods of mathematical statistics.

KEYWORDS: mathematics, mathematical apparatus, applications, financial and insurance mathematics

Kontaktná adresa
Mgr. Radomíra Hornyák Gregáňová, PhD.,
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu,
Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, Tr. A. Hlinku 2, 949 76 Nitra
E-mail: radomira.greganova@uniag.sk

Katedra matematiky

Univerzitné matematické vzdelávanie ako základ pre inovácie vo vede a technike

AKTUÁLNE PROBLÉMY PRI RIEŠENÍ APLIKOVANÝCH ÚLOH

Vladimír Matušek, SR

ABSTRAKT

Cieľom príspevku je poukázať na aktuálne problémy pri riešení aplikovaných úloh vo vyučovaní matematiky a odborných predmetov, v ktorých sa matematika využíva. Pri vyučovaní matematiky je potrebné sprostredkovať študentom nielen teoretické poznatky, ale aj možnosti využitia matematiky v praxi. Príklady v príspevku popisujú proces matematizácie – prechodu od aplikovanej úlohy k matematickej úlohe. Zavádzaním vhodných aplikovaných úloh do výučby možno dosiahnuť zlepšenie kvality vzdelávania. Analýzou chýb pri riešení aplikovaných úloh chceme poukázať na úroveň vedomostí študentov a zvládnutia jednotlivých tematických celkov. Cieľom je upozorniť na chyby, ktorých sa študenti dopúšťajú a nájsť možnosti ich odstránenia. Použitím vhodných metód na odstránenie chýb skvalitníme vyučovací proces a tým zvýšime vedomostnú úroveň študentov.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: aplikovaná úloha, proces matematizácie, kvalita vzdelávania

ÚVOD

Študenti získavajú základné vedomosti z rôznych častí matematiky v predmetoch vyučovaných na Katedre matematiky SPU, ktoré potom využívajú v aplikáciách v ekonomických a technických odboroch a v praxi. Matematika je predmet všeobecného základu v 1. ročníku, na ktorý nadväzujú odborné predmety v ďalších ročníkoch, kde využívajú vedomosti z matematiky. V odborných predmetoch riešia aplikované úlohy. Aplikovaná úloha vyjadruje súvislosti vlastností modelovaného javu. Jej riešenie sa formuje od začiatku, dôležitá je logická analýza aplikovanej situácie a následnej matematickej situácie. Pri riešení aplikovaných úloh vznikajú mnohé problémy, ktoré treba odstraňovať v záujme skvalitňovanie vzdelávania. Úlohou vyučujúcich je zvyšovať vedomostnú úroveň študentov, aby získané vedomosti v predmete Matematika uplatnili v odborných predmetoch a v praxi [2].

Hodnotením študentov poukazujeme na to, čo vedia, čo nevedia, čiže akých chýb sa dopustili. Skvalitniť vyučovací proces možno aj odstránením chýb, ktorých sa študenti dopustili. Vo vyučovaní sa snažíme okamžite poukazovať na chyby, vždy vysvetliť, prečo je niečo nesprávne. Všeobecne platí, že každý by sa mal poučiť nielen z vlastných chýb, ale i z chýb iných a neopakovať ich. Len analýzou chýb, ktorých sa študenti dopúšťajú v matematike, možno označiť ich príčiny a nájsť metódu na ich odstránenie.[3] Implementáciou aplikácií z matematiky do vyučovacieho procesu a vyučovaním voliteľných predmetov zameraných na aplikácie matematického aparátu je možné skvalitniť vyučovací proces a zvýšiť vedomostnú úroveň študentov [1].

MATERIÁL A METÓDY

Pri riešení aplikovaných úloh je nutné využívať exaktné myšlienkové postupy a preto je dôležité podporovať matematické myslenie. Logické myslenie je správne myslenie založené na úsudku, na spôsobe získavania pravdivých všeobecných poznatkov a na spôsoboch ich overovania a zužitkovania.

Pri vyučovaní matematiky väčšina študentov rieši úlohy len pomocou definícií, viet a vzorcov, podobnú situáciu môžeme pozorovať aj pri riešení aplikovaných úloh. Je nutné odstrániť tento formalizmus a viesť študentov k tomu, aby si utvárali aj spontánnu štruktúru vedomia, ktorá je ľudovo nazývaná "zdravý sedliacky rozum". Na rozdiely vo vedomostiach zo stredoškolskej matematiky majú vplyv rôzne faktory, ktoré podmieňujú rozvoj schopností študentov aplikovať teoretické poznatky a uplatniť ich v riešení úloh v odborných predmetoch.

V rámci matematického myslenia je nutné viesť študentov k abstraktnejším pohľadom, modelovať reálne situácie v jazyku matematiky. Modelovanie reálnej situácie môžeme znázorniť aj na aplikovaných, či slovných úlohách. Slovné a aplikované úlohy možno riešiť dvoma spôsobmi :

- **úsudkom** - analyzujeme situáciu, určíme vzťahy medzi danými a hľadanými objektmi a na základe logického uvažovania prídeme k výsledku,
- **aritmetickým modelovaním** - dané a hľadané objekty zapíšeme rovnicou s jednou neznámou alebo sústavou rovníc s viac neznámymi.

Pre porovnanie uvedieme dve riešenia nasledujúceho príkladu:

Príklad 1. *V podniku vyrobili 1400 výrobkov, ktoré predali za 5800 €. Cena výrobku prvej triedy bola 5 €, výrobok druhej triedy stál 2 €. Zistite počet výrobkov prvej a druhej triedy.*

Vyriešime danú úlohu dvoma predchádzajúcimi spôsobmi. Porovnaním oboch riešení zistíme, že riešenie úsudkom je z hľadiska počítania jednoduchšie, netreba v ňom zavádzať rôzne premenné, ale využiť základy matematického myslenia.

Riešenie - úsudkom. Ak by boli všetky výrobky prvej triedy, potom by ich cena bola

$$1400 \cdot 5\,€ = 7000\,€.$$

Cena všetkých výrobkov bola iba 5800 €, preto dostávame rozdiel 7000 € - 5800 € = 1200 €.

Rozdiel v cene výrobkov prvej a druhej triedy je 3 €.

Delením peňažného rozdielu rozdielom ceny výrobkov zistíme počet výrobkov druhej triedy

$$1200\,€ : 3\,€ = 400 \text{ výrobkov}$$

Vypočítajme počet výrobkov prvej triedy: 1400 - 400 = 1000

Úsudkom sme zistili, že bolo vyrobených 1000 výrobkov prvej triedy a 400 výrobkov druhej triedy.

Riešenie - aritmetickým modelovaním. Označme výrobky

pomocou neznámych x a y :

počet výrobkov prvej triedy.............x cena za výrobky prvej triedy..........$5x$

počet výrobkov druhej triedy...........y cena výrobkov druhej triedy...........$2y$

Potom zo zadania príkladu dostaneme sústavu rovníc

$$x + y = 1400$$
$$5x + 2y = 5800$$

Riešením sústavy rovníc o dvoch neznámych dostaneme

$$x = 1000 \qquad y = 400$$

Výsledok. V podniku vyrobili 1000 výrobkov prvej triedy a 400 výrobkov druhej triedy.

Aplikovaná úloha je úloha, v ktorej je súvislosť medzi danými a hľadanými objektmi vyjadrená slovnou formuláciou, ide obvykle o slovné vyjadrenie matematických situácií vo vzťahu k reálnej skutočnosti. Pojem aplikovanej úlohy v širšom rozsahu zahŕňa aj tzv. slovné matematické úlohy. Práve preto je nutné zdôrazňovať význam matematizácie reálnych situácií.

VÝSLEDKY A DISKUSIA

Teraz sa zameriame na aktuálne problémy, ktoré vznikajú pri riešení aplikovaných úloh v jednotlivých fázach riešenia.

/1/ Porozumenie významu slovnej úlohy
Pri riešení aplikovaných úloh neexistuje žiadny univerzálny postup. Najskôr si dôkladne prečítame zadanie úlohy, urobíme analýzu podmienok úlohy, prípadne načrtneme obrázok, ktorý nám pomôže pochopiť postup na riešenie úlohy.

Problém: študenti si dôkladne neprečítajú zadanie úlohy, nevedia znázorniť zadanie pomocou grafu, či obrázku

/2/ Matematizácia aplikovanej úlohy
Zmena slovnej úlohy na matematickú spôsobuje dosť závažný problém, správna matematizácia úlohy ovplyvňuje ďalšie riešenie aplikovanej úlohy. Dôležité je pochopiť význam slovnej úlohy, zmysel jednotlivých slov a slovných spojení a následne zisťovať vzťahy a závislosti medzi jednotlivými údajmi aplikovanej úlohy. Najdôležitejšie je pochopiť podstatu aplikovanej úlohy. Do ďalšieho riešenia často vstupujú aj rôzne počiatočné a ďalšie podmienky, ktoré môžu byť súčasťou zadania úlohy, alebo sa ich dodatočné zadanie žiada od riešiteľa. Matematizácia aplikovanej úlohy vyžaduje skúmanie danej situácie, zhromažďovanie zadaných informácií a formuláciu ďalšieho postupu pri riešení úlohy.

Problém: matematizácia slovnej úlohy, problém so zápisom pomocou veličín

/3/ Riešenie matematickej úlohy
Problém spočíva v tom, že nepoznáme dostupné matematické prostriedky na riešenie matematickej časti aplikovanej úlohy. Pod prostriedkami rozumieme matematický aparát používaný vo vyučovaní matematiky - prostriedkami algebry (rovnice a nerovnosti), aritmetiky (pomocou čísel), geometrie (náčrtmi), graficky (pomocou grafu), diferenciálneho a integrálneho počtu (pomocou derivácií, integrálov a diferenciálnych rovníc).

Problém: nedostatočné vedomosti z jednotlivých matematických tém

/4/ Overenie výsledkov matematickej úlohy
Jedná sa o situáciu, v ktorej overíme skúškou správnosti, či sme správne vyriešili matematickú úlohu. Problém spočíva v tom, že študenti pri riešení aplikovanej úlohy tento krok často vynechávajú a tým nemôžu úlohu správne vyriešiť**.** Nie všetky riešenia , ktoré dostaneme, musia byť riešením matematickej úlohy, napr. pri použití neekvivalentných úprav.

Problém: na skúšku správnosti sa často zabúda, avšak pri niektorých úlohách je skúška nevyhnutnou časťou riešenia (napr. iracionálne rovnice)

/5/ Interpretácia výsledkov matematickej úlohy do aplikovanej úlohy.
Nie všetky riešenia matematickej úlohy musia byť riešeniami slovnej úlohy, napr. pri úlohách a peňažných prevodoch nevyhovujú riešeniu záporné čísla, komplexné čísla a pod. Niektorý z výsledkov matematickej úlohy nemusí vyhovovať aplikovanej úlohe, napr. pri riešení pomocou kvadratickej, iracionálnej rovnice atď, aj keď sme všetky podmienky úlohy zobrali do úvahy (úlohy o pohybe, úlohy o zmesiach a úlohy o práci).

Problém: použitie všetkých riešení matematickej úlohy na vyriešenie aplikovanej úlohy

/6/ Matematická interpretácia riešenia
Jedná sa vlastne o spätný prechod od výsledku matematickej úlohy k aplikovanej úlohe. To znamená, že až výsledok interpretovaný do pôvodnej situácie, dáva výsledok aplikovanej úlohy.

Problém: chyby pri spätnom prechode

/7/ Správna interpretácia podmienok úlohy
Správne riešenie úlohy závisí od správneho zaradenia ďalších podmienok úlohy, pomocou ktorých vyjadríme čiastkové výsledky a ktoré postupne vedú k riešeniu samotnej úlohy. Matematickú úlohu získame matematickým sformulovaním podmienok úlohy.

Problém: na podmienky aplikovanej úlohy zabúdame

/8/ Počet riešení slovnej úlohy
V niektorých úlohách je dôležité na základe počiatočných podmienok zistiť, koľko má úloha riešení (jedno, dve, nekonečne veľa, úloha nemá riešenie).

Problém: často chýba diskusia o počte riešení a ich zdôvodnenie

Pri konkrétnych príkladoch sa teraz zameriame na niektoré už spomínané problémy, ktoré sa týkajú riešenia aplikovaných úloh.

Príklad 2. Vyjadrime funkciu celkových nákladov, ak funkcia marginálnych nákladov je daná vzťahom

$$MC(x) = 30 - 0{,}03x, \text{ kde } x \in (0{,}1000).$$

Ďalej vieme, že úroveň celkovej produkcie je 140 vyrobených kusov tovaru s celkovými nákladmi 4000 €.

/1/ Porozumenie významu slovnej úlohy

Jedná sa o úlohu z oblasti ekonomiky, ktorá patrí medzi ekonomické aplikácie. Na riešenie potrebujeme poznať pojmy, ktoré súvisia s danou úlohou

$MC(x)$ - marginálne náklady,

$TC(x)$- celkové náklady.

Ďalej je dôležité poznať vzťahy medzi zadanými pojmami. Vieme, že marginálne náklady dostaneme deriváciou celkových nákladov, čo vedie k matematizácii danej úlohy.

/2/ Matematizácia slovnej úlohy

Z diferenciálneho počtu je zrejmé, že deriváciou celkových nákladov pri produkcii x jednotiek dostaneme funkciu marginálnych nákladov, čo môžeme zapísať nasledovne

$$MC(x) = [TC(x)]'.$$

Pri matematickom riešení potrebujeme poznať pojmy z matematiky (derivácia a neurčitý integrál), a vzájomný vzťah medzi deriváciou a integrálom. Teda k nejakej funkcii $f(x)$ budeme hľadať takú funkciu $F(x)$, ktorej derivácia sa rovná pôvodnej funkcii $f(x)$,aby platilo $F'(x) = f(x)$. Teda funkcia $F(x)$je vlastne primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$.

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f(x)$ nazývame neurčitým integrálom funkcie $f(x)$, čo zapisujeme v tvare

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\ ,\ c \in R\,.$$

Teda ak vieme, že $MC(x) = [TC(x)]'$, potom z toho

$$TC(x) = \int MC(x)\,dx\,.$$

/3/ Riešenie matematickej úlohy

Dosadením funkcie do posledného vzťahu a následným integrovaním dostaneme funkciu celkových nákladov

$$TC(x) = \int (30 - 0{,}03x)\,dx = \int\left(30x - 0{,}03\frac{x^2}{2}\right)dx = 30x - 0{,}015x^2 + C.$$

Zistili sme, že riešením je nekonečne veľa funkcií celkových nákladov (za C môžeme dosadiť ľubovoľné číslo), preto doplňme podmienku danej úlohy (úroveň celkovej produkcie je 140 vyrobených kusov tovaru s celkovými nákladmi 4000 €), čo matematicky zapíšeme

$$TC(140) = 4000$$

Keď uvedené údaje dosadíme do výsledku predchádzajúceho príkladu dostaneme

$$4000 = 30 \cdot 140 - 0{,}015 \cdot 140^2 + C\,,$$

z toho $C = 94$.

Teda $TC(x) = 30x - 0{,}015x^2 + 94$.

Z predchádzajúceho príkladu je zrejmé, že pri riešení daných typov úloh musí byť uvedená podmienka, ktorú v matematike zvykneme označovať „začiatočná podmienka".

Študenti prvého ročníka FZKI mali v šk. roku 2019/20 riešiť problémovú úlohu – príklad 1, ktorú sme spomínali v časti Materiál a metódy tohto príspevku. Úlohu riešili dvoma spôsobmi:

Spôsob A – úsudkom, spôsob B : aritmetickým modelovaním

Tab. 1 Riešenie problémovej úlohy:

Spôsob výpočtu	**Počet študentov**	**Správny výsledok**
A	15	7
B	39	21
Spolu	54	38

Zdroj: vlastné spracovanie

Z tabuľky 1 je zrejmé, že 72% študentov riešilo úlohu aritmetickým modelovaním pomocou sústavy 2 rovníc o dvoch neznámych, kde dosiahli 54% úspešnosť. Pri riešení úsudkom bola úspešnosť 47%.

Pri riešení príkladu 2 bol najväčším problémom prechod od aplikovanej úlohy k matematickej interpetácii (40% študentov FEM). Ďalším problémom bolo vynechanie začiatočnej podmienky.

ZÁVER

Matematika sprevádza človeka od začiatku školskej dochádzky do skončenia vysokej školy a ďalej aj v praxi. Aplikácie matematiky zohrávajú dôležitú úlohu v profilujúcich predmetov a v praxi. Zaradením aplikácií do výučby sa vyučovací proces skvalitní a zvýši sa vedomostná úroveň študentov. Vhodné aplikácie sú vstupnou bránou k priblíženiu matematiky študentom. Snahou pedagóga je zdôrazňovať potrebu tvorivého využívania matematiky pri riešení aplikovaných úloh, modelovaní reálnych situácií a javov. Problémy, ktoré vznikajú pri riešení aplikovaných úloh spôsobuje nepostačujúca úroveň vstupných matematických a vedomostí z rôznych oblastí (technických, ekonomických, atď.) Snahou je racionálnejšie a sústavnejšie využívať medzipredmetové vzťahy.

POĎAKOVANIE

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 029SPU-4/2018 s názvom „Digitálne edukačné aplikácie v matematike“.

REFERENCES

[1] Hornyák Gregáňová, R. -- Országhová, D. Postavenie vysokoškolského učiteľa pri výučbe matematiky pomocou elektronických študijných materiálov = Significance of a university teacher in a teaching of mathematics via electronic study materials. In *DIDMATTECH XXIV*. Kraków: Instytut Techniki, 2011, s. 292-298. ISBN 978-83-7271-678-1.

[2] Országhová, D., Hornyák Gregáňová, R. & Kecskés, N. (2018). Information technology tools in mathematical topics. In *Edukacja - technika - informatyka w budowaniu lepszej przyszłości*. Radom: Wydawnictwo Uniwersytetu Technologiczno-Humanistycznego w Radomiu. s. 51-58.

[3] Vrábel, P. : Najčastejšie chyby v matematických dôkazoch a riešeniach študentov a možnosti ich odstránenia. In: *Zborník 1 - Medacta 1999* (Škola a učiteľ v treťom tisícročí). Nitra: UKF, 1999, str. 165 – 167. ISBN 80-967746-2-X

ACTUAL PROBLEMS OF SOLVING APPLIED TASKS

ABSTRACT

The aim of the paper is to show current problems in solving applied tasks in teaching maths and technical subjects. In maths teaching it is necessary to teach students not only theoretical background, but also possibilities of its application in practice. The examples in the paper describe the process of mathematization – transition from applied task to mathematic task. Applying proper tasks into the process of education may help to improve the quality of education.

KEYWORDS: applied task, process of mathematization, quality of education

Contact address / Kontaktná adresa
Mgr. Vladimír Matušek, PhD.
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu, Slovenská poľnohospodárska univerzita Tr. A. Hlinku 2, 949 76 Nitra,
E-mail: vladimir.matusek@uniag.sk

University mathematical education as a basis for innovations in science and technology

CORRELATION-REGRESSION ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF PRODUCTION RESOURCES ON OILSEED RAPE PRODUCTIVITY

Olena MELNICHENKO, Viktor NEPOCHATENKO, UA

ABSTRACT

The presented work is one of the possible variants of the application of mathematical statistics methods and the creation of mathematical models by example correlation-regression analysis of the influence of production resources on oilseed rape productivity. It explains in detail the main stages of research which are specifically applied to agriculture. Significant contribution is represented with the regression equations for the economic model which quantitatively express the connection between the available resources and the results obtained on their basis. The paper shows that the main factors for the production of oilseed rape are the availability of labor, land, material and technical resources. The expansion or reduction of arable land in agricultural enterprises is not the main significant factor affecting the production of oilseed rape. Oilseed rape production expansion and stable development is possible without increasing the area of arable land due to the efficient use of working capital and labor resources. We presented the four factor model, which reflects the impact of total production resources on oilseed rape production. This model includes the following indicators: gross oilseed rape harvest, hundredweight; the average number of employees employed in the field of plant growing, quantity of people; area of arable land, thousands hectares; amortization expenses of non-current assets, thousands currency units; material production costs, thousands currency units.

KEYWORDS: mathematical statistics, correlation, regression lines, agriculture, discrete and continuous variables quantities

INTRODUCTION

Studying of mathematical statistics is an important part of the training methodology of scientific staff who work with qualitative and quantitative analysis of any mass phenomena including presented analysis. Mastering modern methods of collecting, processing and analyzing statistical information is an important element of the training of highly skilled staff [4]. The basic techniques and methods of mathematical statistics are used in agriculture, industry, economics, etc.

Considering that the main task of mathematical statistics is not only the comparison of the numerical characteristics of two or more groups, and also the promising forecast that gives us possibility to make analysis and conclusions in various fields. Therefore, it's actual to introduce the possible use of mathematical statistics elements in various fields.

The purpose of the work was to find out the mathematical modeling regularities in various fields and apply the correlation-regression analysis to characterize the generated mathematical models.

To study the process of factor analysis of oilseed rape production on the basis of the linear economic-statistical model. Include the following indicators in this model: gross oilseed rape harvest, hundredweight; the average number of employees employed in the field of plant growing, quantity of people; area of arable land, thousands hectares; amortization expenses of non-current assets, thousands currency units; material production costs, thousands currency units (to substantiate the presented dependence).

MATERIALS AND METHODS

The research material is the production of oilseed rape in one of the regions of Ukraine and the statistical processing of discrete and continuous variables/quantities.

The research methods used in this paper are universally recognized methods of scientific knowledge:
• Inductive: collection, systematization and classification of mathematical models;
• Practical: application of theoretical knowledge of the created models analysis;
• Statistical: estimation of reliability between groups, establishing correlation relations and regression equation [7, 9].

For study of the correlation-regression analysis of the influence of production resources on oilseed rape productivity was analyzed one Ukrainian region that includes 24 districts. General quantity of the analyzed enterprises is 62. The gross oilseed rape harvest – 76486.7 hundredweights. The average number of employees employed in the field of plant growing, 10238.2 quantity of people. The area of arable land – 948.3 thousands hectares. The amortization expenses of non-current assets – 6291.7 thousands currency units. The material production costs – 76486.7 thousands currency units (Table 1).

The analyzed indexes of this work are gross oilseed rape harvest, average number of employees employed in the field of plant growing, area of arable land, amortization expenses of non-current assets, material production costs.

The linear multifactorial economic model was formed as follow equation:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \,,$$

y – gross oilseed rape harvest, hundredweight;
x_1 – the average number of employees employed in the field of plant growing, quantity of people;
x_2 – area of arable land, thousands hectares;
x_3 – amortization expenses of non-current assets, thousands currency units;
x_4 – material production costs, thousands currency units;
a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 – unknown coefficients.

The statistical reliability of the multiple linear correlation coefficient and the equation itself will be estimated according to the Student's t-criterion [9]. All calculations were made by Microsoft Excel.

RESULTS AND DISCUSSION

In today's conditions of the world economy development scientists often use mathematical methods for estimating and forecasting economic processes. This work represents one of the methods of operation by correlation-regression analysis in agriculture. Also the paper represents the creation of economic-mathematical models which quantitatively express the connection between available resources and the results of production.

Let's consider the process of the oilseed rape production multivariate factor analysis one of the regions of Ukraine using the economic-statistical model. This grain crop is important because, firstly, oilseed rape is an annual oilseed plant, its seeds contain 48-52% of the oil used in the production of paint, varnish, soap, food (margarine), etc. In addition, oilcake which is the product of oilseed rape processing is used as farm animal feed. But the main thing is that oilseed rape goes to the global market as an environmentally friendly fuel.

The most responsible and complicated stage of economic and statistical research is the establishment of mathematical form by the choice and justification of the equation form. Among the whole variety of equations we must choose one that will meet the following requirements:
- choice of values that can be quantified;
- the equation should be easy to use and convenient for calculating a number of additional parameters that have a well-defined economic content.

According to many economists [1] more accurate estimate of the size of the aggregate resources that operates in the process of agricultural production can be represented by four factors, namely:
- labor resources (number of employees or time worked);
- land resources (area of agricultural land);
- material resources (average annual cost of basic production facilities of agricultural purpose or amortization recoupment);
- financial resources (material or production costs, existing working capital) [10].

The selection of these elements was carried out taking into account the characteristics of oilseed rape production [11]. When we choose the indicator that reflects the impact of labor resources, we should proceed from the following considerations. The use of time worked as an indicator for estimating labor resources in the general system of total productive resources is currently made impossible because since 2007 agricultural enterprises have not been accounting labor costs (in person-hours) for production of agricultural products.

At the same time, usage of the average number of employees in the industry in general has impact on the investigated characteristic of such indicator as the number of workers employed in the field of farming [10]. Therefore, to assess the impact of labor resources in the overall system of total productive resources on the production of individual crops, we can take the average number of employees employed in the field of plant growing and their work that directly effects on the production of oilseed rape in the region. To assess the impact of aggregate resources land resources must be reflected in the area of arable land.

Cultivation and harvesting of sustainable oilseed rape harvest is based on high culture of agriculture and usage of modern agricultural machinery, preparation and adding of fertilizers, basic preliminary soil cultivation and sowing, integrated control of weeds, pests and diseases, combine harvesting. Improving the agricultural production efficiency especially depends on providing agrarian enterprises with modern agricultural machines that are part of non-current assets.

In the process of using these non-current assets some of their value is transferred to the cost of finished products (oilseed rapes) as amortization expenses. Therefore, to assess the impact of material resources on oilseed rape production in the general system of total productive resources amortization expenses should be used for those non-current assets that are directly involved in the production of oilseed rape in the region.

Effective functioning of agricultural enterprises is impossible without optimal provision of financial resources determined by working capital used in a production process. They are fully used in the same production cycle, transfer their value to products and generate direct material costs (costs associated with the purchase of seeds and planting material, mineral fertilizers and petroleum products, payment for services and work of third parties, etc.). These expenses are crucial in cost formation of agricultural products. We believe that for the analysis of the influence of financial resources on oilseed rape production in the general system of total productive resources we should use the direct material costs associated with this production.

Therefore, the correlation model includes indicators characterizing the provision of production by labor, land, material and technical resources. Factors effecting on the production of oilseed rape are following: the average number of employees employed in the field of plant growing, (persons, x_1); the area of arable land (thousands hectares, x_2); amortization expenses of non-current assets (thousands currency units, x_3); material production costs (thousands currency units, x_4).

Tab. 1 Influence of productive resources on oilseed rape yield in the Kyiv region

Districts	the average number of employees employed in the field of plant growing, (persons, x_1)	the area of arable land (thousands hectares, x_2)	amortization expenses of non-current assets (thousands currency units, x_3)	material production costs (thousands currency units, x_4).	gross oilseed rape harvest (hundredweight, y)
Ivankivskyi	266.0	155	104.2	1447.1	17247.0
Bilocerkivskyi	1525.0	65.3	313.2	5145.7	57661.0
Baryshivskyi	1473.0	58.1	380.9	8297.7	98818.0
Boguslavskyi	547.0	21.8	30.1	1007.4	13520.0
Boryspilskyi	1760.0	72.2	452.1	3358.0	53177.0
Borodyanskyi	344.0	17.4	351.9	2103.8	28767.0
Brovarskyi	826.0	8.5	150.9	964.2	11648.0
Vasylkivskyi	546.0	21.6	67.8	1751.7	23636.0
Vyshgorodskyi	1958.0	74.7	381.7	7110.3	93463.0
Volodarskyi	336.0	16.1	23.6	866.5	7625.0
Zgurivskyi	540.0	27.4	667.0	4639.8	43418.0
Kagarlyczkyi	762.0	31.4	178.6	2992.4	27932.0
Makarivskyi	343.0	19.9	36.1	1574.3	21261.0
Myronivskyi	925.0	37.2	299.8	3584.0	42945.0
Obukhivskyi	2165.0	64.4	349.4	3973.6	53779.0
Pereiaslav-Khmelnytskyi	811.0	25.6	3.0	184.0	2807.0
Poliskyi	2133.0	45.3	149.3	1552.6	26167.0
Rokytnianskyi	613.0	24.8	139.6	2980.3	17577.0
Skvyrskyi	2332.0	72.8	805.2	5251.1	81371.0
Stavyshchenskyi	1372.0	58.3	189.3	2926.6	39695.0
Tarashchanskyi	1475.0	58.3	381.9	8297.7	98820.0
Tetiivskyi	549.0	21.8	31.1	1007.4	13531.0
Fastivskyi	1771.0	72.5	453.1	3358.0	53277.0
Yahotynskyi	345.0	17.4	351.9	2112.5	28777.0

The creation of regression models was carried out by gradual inclusion of certain factors into them. The above information are only general information from agricultural economics.

The average number of employees employed in the field of plant growing is the first factor of the impact on the oilseed rape production. The following equation describes the change in the gross oilseed rape harvest and depends on the presence of plant-growing workers in agricultural enterprises in particular region:

$$y = 8034.0 + 27.9x_1,$$

y – gross oilseed rape harvest, hundredweight;
x_1 – the average number of employees in the field of plant growing, quantity of people.

This equation shows the linear relationship between gross oilseed rape harvest and the average number of employees employed in the field of plant growing. But this equation can not correctly represent the process that we are considering. The gross oilseed rape harvest is also affected by other indicators as described in the methods and materials. In the future, we build the economic model by adding other more important indicators.

The pair correlation coefficient for this model was 0.7, indicating average level of dependence. It gives us reasons to argue that the gross harvest of oilseed rape depends on the availability of plant-growing workers in large and medium-sized agricultural enterprises. But the given model describes the dependence only on 48.5%, since the determination coefficient of this equation is 0.485. Therefore, you need to enter other factors to build a more reliable model. The opinion that increase or decrease of the average number of workers in agricultural enterprises in the region resulting higher rates of growth or decline of oilseed rape production is quite logical since the human factor in agriculture remains one of the production determinants.

Inclusion to the equation one more factor − the area of arable land in agricultural enterprises – substantially has changed the coefficient of multiple correlation: it has increased to 0.84. So we have reasons to consider the dependence of the effective indicator on the factors included in the model to make correlation stronger. The obtained model describes the dependence on 71.0%. Of course, land is a determining resource for agricultural purposes; therefore, as expected, oilseed rape production in the region depends on the available area of arable land in the farms of the Kyiv region. The equation describing the dependence of the gross oilseed rape harvest under the influence of two factors will follows be as:

$$y = 1911.5 + 10.6x_1 + 1324.0x_2,$$

y – gross oilseed rape harvest, hundredweight;
x_1 – the average number of employees in the field of plant growing, quantity of people;
x_2 – area of arable land, thousands hectares.

Inclusion to the equation of another factor − amortization expenses of non-current assets – hasn’t had any effect on the increase of the correlation between actual and theoretical values of the effective indicator: the correlation coefficient increased to 0.89. The determination coefficient was changed by 0.08.

The correlation-regression model will have following form:

$$y = 3183.6 + 10.1x_1 + 1042.5x_2 + 45.9x_3,$$

y – gross oilseed rape harvest, hundredweight;
x_1 – the average number of employees in the field of plant growing, quantity of people;
x_2 – area of arable land, thousands hectares;
x_3 – amortization expenses of non-current assets, thousands currency units.

The next step in the study was to include into the equation another factor - the material production costs associated with the production of oilseed rape. This factor also had effect on the resultant indicator: the correlation coefficient was increased by 0.09 and became equal to 0.98. The four factor model, which reflects the impact of total production resources on oilseed rape production has become as follows:

$$y = 5647.2 + 4.5x_1 + 192.0x_2 + 9.1x_3 + 9.4x_4,$$

y – gross oilseed rape harvest, hundredweight;
x_1 – the average number of employees in the field of plant growing, quantity of people;
x_2 – area of arable land, thousands hectares;
x_3 – amortization expenses of non-current assets, thousands currency units;
x_4 – material production costs, thousands currency units.

The verification of the model for the presence of multicollinearity has shown the absence of the latter, and therefore, the received results can be considered reliable [3]. The derivation of any factor from this model reduces both the multiplicity of the correlation coefficient and the index of multiple determination which characterizes the joint effect of all factors on the investigated indicator. In the four-factor model it was 0.959. This indicates that the built model is 95.9% dependent on the selected factors and 4.1% − on other reasons that was not counted in the model.

The statistical reliability of the multiple linear correlation coefficients and the equation itself is estimated according to the Student's t-criterion [9]. The resulted model is adequate to reality with probability of 0.95. Therefore, we can state the statistical significance of the regression equation as a whole, since the calculated values of statistic indicators are greater than tabular ones.

Any built model should be checked not only for the statistical but also on the logical adequacy that means the correspondence of the economic content equation of the phenomenon under study. In the case of multi-factor models, logical adequacy is evaluated first of all by finding out the correspondence of signs with unknown for nature interconnections between each factor and the resultant indicator [17].

All signs in all four factors confirm the direct relationship between each of the factors and the result. Indeed in other equal conditions the growth of workers number, area of arable land, level of main assets exploitation and the use of working capital assist growth of oilseed rape production. If the indicated factors decrease, the result will react accordingly.

CONCLUSION

Thus, the main factors for the oilseed rape production are the availability of labor, land, material and technical resources. Expansion or reduction of arable land in agricultural enterprises is not the main significant factor affecting the oilseed rape production.

The stable oilseed rape development production can be provided by the method of efficient usage of working assets and labor resources and without increasing the area of arable land. If we take into account that the oilseed rape crops growth areas for biodiesel processing may cause the region's problems in providing food products to the population. Then in the subsequent study it is necessary to determine the optimal crops area. Changes these areas should not effect on the agricultural food products production.

Taking into account the methods and techniques considered in this study we can make an equation that binds the non-mentioned characteristics and has direct correlation-regression analysis application in agriculture.

PRACTICAL RECOMMENDATIONS

The study of research statistical methods in any field gives an opportunity for fully analyze its development and further forecasting. Taking into account the methods and techniques considered in scientific work, it is possible to investigate the influence of production resources and other factors to the yield of any agricultural crop, which makes it possible to directly apply correlation-regression analysis in agriculture.

In addition, the ability to create a regression equation makes it possible to compare the input resources and the results obtained. Creating the right model makes it possible for any industry to function properly.

REFERENCE

[1] Ayvazyan, S., Yunukov, I., Meshalkin, L. (1983). Applied Statistics: Fundamentals of Simulation and Primary Processing of Dangers - Moscow: Finance and Statistics, 386 p.

[2] Beshelev, S., Gurevich, F. (1980). Mathematical-Statistical Methods of Expert Evaluations - Moscow: Statistics, 263 p.

[3] Prymak, V. (2018). Bulletin on Financial and Economic Activity of Agricultural Enterprises for 2017 - Kyiv: Main Department of Statistics in the Kyiv region, pp. 22-41.

[4] Garkavyi, V., Yarovaya, V. (2004). Mathematical Statistics - Kiev: Professional, 484 p.

[5] Gmurman, V. (1999). Theory of Probability and Mathematical Statistics - Moscow: Higher school, 320 p.

[6] Hamning, R. (1991). The Art of Probability for Scientists and Engineers New York: Addison-Wesley, pp. 256-264.

[7] Kramer, G. (1975). Mathematical Methods of Statistics - Moscow: Mir, 684 p.

[8] Kolemaev, V., Staroverov, O., Turundayevsky, V. (1991). Probability Theory and Mathematical Statistics - Moscow: Higher school, 244 p.

[9] Melnychenko, O., Yakimenko, I., Shevchenko, R. (2006). Statistical Processing of Experimental data: Textbook - Bila Tserkva, pp. 17-18, pp. 24-27.

[10] Nazarenko, N. (1987). Production Potential of Agriculture and Efficiency of Its Use - Voronezh: VSHI, 22 p.

[11] Ulyanchenko, O. (2006). Formation and Use of Resource Potential in Agrarian Sphere - Kharkiv: Kharkiv National University agr Unt, pp. 49-58.

Contact address

Assoc. prof. Olena Melnichenko, PhD.,
Assoc. prof. Viktor Nepochatenko, PhD.,
Department of Mathematics and Physics,
Bila Tserkva National Agrarian University,
pl. 8/1 Soborna, Bila Tserkva, Kyivska oblast, 09117 Ukraine
E-mail: mela731@ukr.net

Katedra matematiky

Univerzitné matematické vzdelávanie ako základ pre inovácie vo vede a technike

BIOPOTRAVINY V STRAVE VYSOKOŠKOLSKÝCH ŠTUDENTOV (PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA)

Dana Országhová, SK
Pavel Fľak, SK

ABSTRAKT

Stravovanie mladých ľudí je ovplyvnené zvykmi v rodine, ktoré sú podmienené rôznymi faktormi. V rámci Slovenska existujú rozdiely v dodržiavaní tradícií, ktoré môžu byť spojené s odlišnými potravinami a jedlami. Významným faktorom pre druhy konzumovaných potravín sú aj finančné podmienky slovenských rodín. Zaradenie biopotravín do stravy mladých ľudí vyžaduje zvýšené náklady na nákup potravín. Hlavným cieľom príspevku bolo zistiť a vyhodnotiť názory na nakupovanie a konzumovanie biopotravín vo vzorke vysokoškolských študentov Fakulty ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre. Údaje na vyhodnotenie sme získali prostredníctvom prieskumného dotazníka, ktorý bol realizovaný v akademickom roku 2018/2019. Z výsledkov vyplýva, že všetci študenti z výskumného súboru poznajú biopotraviny, pričom časť študentov biopotraviny nakupuje (61 %) a v rámci rodiny aj konzumuje (72 %). Testovanie formulovaných hypotéz sme realizovali pomocou χ^2-kvadrát testu, avšak ani v jednom prípade nebola závislosť medzi skúmanými znakmi súboru potvrdená.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: biopotraviny, prieskumný dotazník, vysokoškolskí študenti, χ^2-kvadrát test štvorcovej kontingencie

ÚVOD

Odborníci na výživu, ako aj bežní spotrebitelia sa začali zamýšľať nad zložením a obsahom potravín, ktoré nakupujú a následne konzumujú. V súvislosti so zdravým životným štýlom a významom kvalitných potravín objavujú sa biopotraviny v ponuke obchodných reťazcov, reklamy na bioprodukty sú uvádzané v printových a televíznych médiách, ako aj informácie o priaznivom vplyve biopotravín na zdravotný stav ľudí.

V Zákone č. 152/1995 Z. z. o potravinách nájdeme definíciu, ktorá charakterizuje potraviny ako látku alebo výrobok, ktoré sú spracované, čiastočne spracované alebo nespracované a sú určené na ľudskú spotrebu, alebo pri ktorých sa odôvodnene predpokladá, že budú požité ľuďmi [10]. Veľký záujem prejavujú spotrebitelia o biopotraviny, ktoré sú definované ako ekologické potraviny, ktoré sa vyrábajú iba z bioproduktov, pričom pri ich výrobe je zakázané použitie konzervačných látok, stabilizátorov, dochucovadiel a geneticky modifikovaných organizmov v akejkoľvek podobe [3]. Do tejto oblasti patria produkty organického poľnohospodárstva, ktoré dodržiava aj podmienky ekologickej produkcie. Medzi obilninami je v súčasnosti skúmaný ovos, ktorý by mohol byť zaradený do výživy ľudí trpiacich celiakiou [1]. Dôležitým faktorom pri kúpe biopotravín je aj ich označovanie, aby spotrebitelia poznali logo ekologickej produkcie [5].

V rozhodovacom procese spotrebiteľa pri nákupe potravín zohrávajú významnú úlohu viaceré faktory [9]. Poznáme štyri hlavné skupiny faktorov, ktoré vplývajú na nákupné rozhodovanie: kultúrne, spoločenské, osobnostné a psychologické faktory. Ako uvádza Kita [4], k osobnostným faktorom patrí vek spotrebiteľa, životný cyklus, zamestnanie, ekonomické podmienky, životný štýl a osobnosť. Životný štýl človeka sa prejavuje v jeho aktivitách, záujmoch a názoroch. Rozhodovanie zákazníka pri nákupe tovarov a služieb významne ovplyvňuje aj jeho ekonomická situácia. Správne nastavenie motivačných faktorov pre úspešný predaj produktov spotrebiteľom, resp. odberateľom závisí od vhodne uplatnených kompetencií v marketingovej komunikácii a od odborných rozhodnutí manažérov obchodných podnikov [7], [2].

Vlastné názory a požiadavky pri nakupovaní potravín majú aj študenti vysokých škôl, teda aj študenti Fakulty ekonomiky a manažmentu Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre. Hlavným zámerom príspevku bolo zistiť ich preferencie pri nákupe a konzumovaní biopotravín, pričom sme použili nástroj marketingových výskumov, ktorým je prieskumný dotazník.

MATERIÁL A METÓDY

Materiál na spracovanie príspevku sme získali prostredníctvom prieskumného dotazníka v akademickom roku 2018/2019, na ktorom sa zúčastnilo 76 študentov prvého ročníka Fakulty ekonomiky a manažmentu SPU v Nitre (študenti v dennej forme štúdia). Rozdelenie respondentov podľa pohlavia bolo nasledovné: ženy v počte 58 a muži v počte 18. Dotazník obsahoval spolu 12 otázok, z toho 9 otázok bolo uzatvorených, teda respondenti vyberali odpoveď z daných možností. Tri otázky v dotazníku mali charakter klasifikačného kritéria. Odpovede respondentov sme spracovali metódami deskriptívnej štatistiky a prezentovali v grafickej forme pomocou nástrojov programu MS Excel.

Na testovanie hypotéz sme použili metódu χ^2-kvadrát test. Hlavným princípom tejto metódy je, že na prvkoch výberového súboru skúmame existenciu závislosti medzi danými kvalitatívnymi znakmi. Výsledky pozorovania môžeme zapísať do asociačnej tabuľky (pre dva dichotomické znaky) alebo do kontingenčnej tabuľky (ak kvalitatívne znaky nadobúdajú viac triediacich úrovní). Formulácia nulovej hypotézy *H*: skúmané znaky *A*, *B* sú nezávislé.

Testovacie kritérium má vyjadrenie

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{(f_{ij}-o_{ij})^2}{o_{ij}},$$

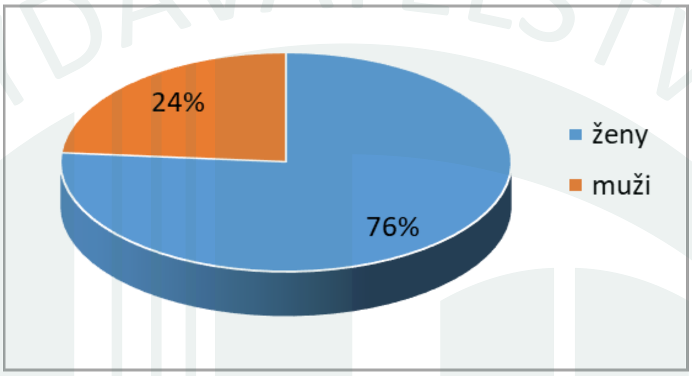
kde f_{ij} sú empirické početnosti, o_{ij} sú očakávané početnosti, $k > 2$ alebo $m > 2$. Nulovú hypotézu zamietame na zvolenej hladine významnosti α, ak hodnota testovacieho kritéria prekročí tabuľkovú kritickú hodnotu pre príslušný počet stupňov voľnosti $r = (k-1)(m-1)$.

VÝSLEDKY A DISKUSIA

V tejto časti príspevku sú uvedené výsledky realizovaného dotazníkového prieskumu, pričom sa podrobnejšie sústredíme na vybrané otázky.

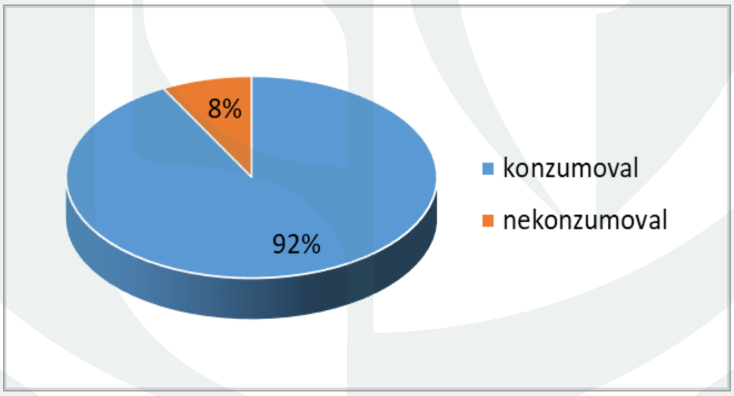
Analýza a grafická prezentácia odpovedí respondentov

Prvá klasifikačná otázka v dotazníku sa týkala pohlavia respondenta. Na obrázku (Obr. 1) vidíme rozdelenie respondentov podľa pohlavia, teda 76 % tvorili ženy a 24 % muži, spolu v počte 76. Vekové zloženie respondentov je v rozpätí od 19 do 21 rokov. Študenti majú úplné stredné vzdelanie s maturitou, ktoré absolvovali na obchodných akadémiách, gymnáziách a odborných stredných školách. Bydlisko študentov je prevažne v západnej časti Slovenska.



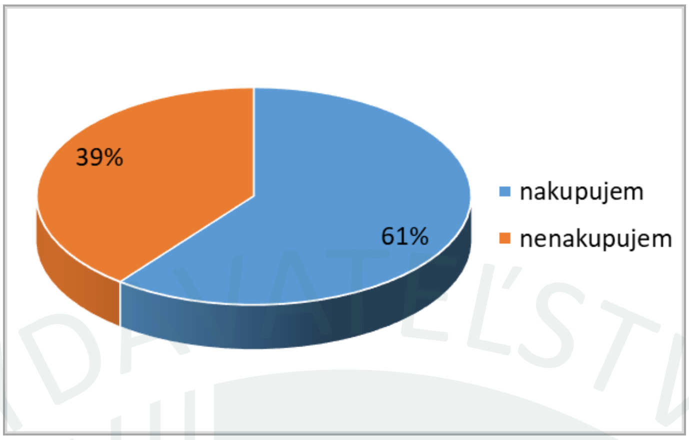
Obr. 1 Rozdelenie respondentov podľa pohlavia
Zdroj: prieskumný dotazník, vlastné spracovanie

Všetci respondenti vyjadrili kladnú odpoveď, že poznajú biopotraviny. V druhej otázke sme zisťovali, či študenti už konzumovali nejaký druh biopotravín. Z grafického spracovania odpovedí (Obr. 2) vyplýva, že vo výskumnej vzorke je 8 % študentov, ktorí ešte nekonzumovali biopotraviny zakúpené ako bioprodukt.



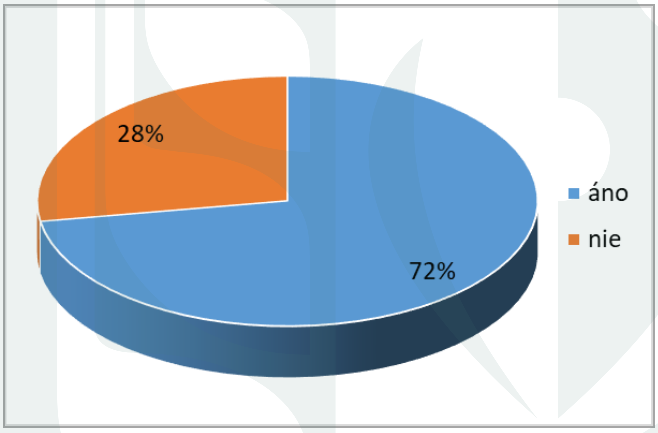
Obr. 2 Vyhodnotenie odpovedí na otázku o konzumácii biopotravín
Zdroj: prieskumný dotazník, vlastné spracovanie

Zaradenie biopotravín do stravovania je spojené s ich nakupovaním. Dôležité odpovede boli získané v ďalšej otázke, ktorou sme zisťovali, či respondenti nakupujú biopotraviny. Z odpovedí vidíme (Obr. 3), že 61 % študentov uviedlo kladnú odpoveď. Buď nakupujú biopotraviny priamo naši respondenti, alebo ich nakupujú niektorí členovia v ich rodine.



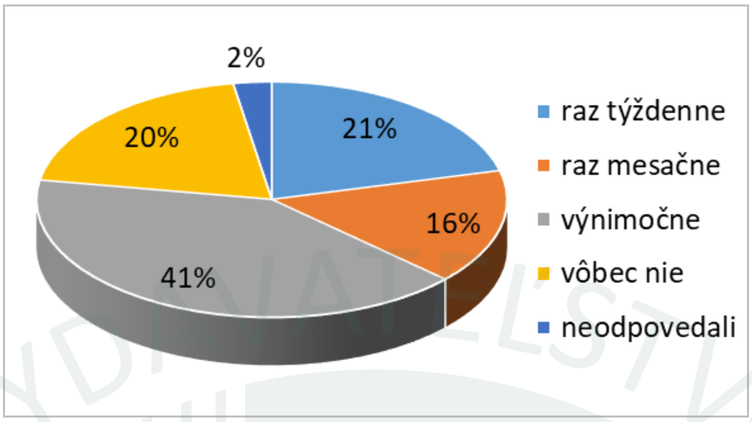
Obr. 3 Vyhodnotenie odpovedí na otázku o nakupovaní biopotravín
Zdroj: prieskumný dotazník, vlastné spracovanie

S výsledkami predchádzajúcich otázok súvisia aj analyzované odpovede respondentov na otázku, či konzumujú biopotraviny aj ďalší členovia v rodine (Obr. 4). Výsledky potvrdzujú, že až 72 % respondentov uviedlo kladnú odpoveď. Vysokoškolskí študenti v prvom ročníku štúdia nemajú založené vlastné rodiny, ale zvyčajne žijú spolu s rodičmi, prípadne súrodencami. Teda v rámci rodiny nakupujú potraviny viacerí členovia, ktorých súčasťou je aj nakupovanie a konzumovanie biopotravín.



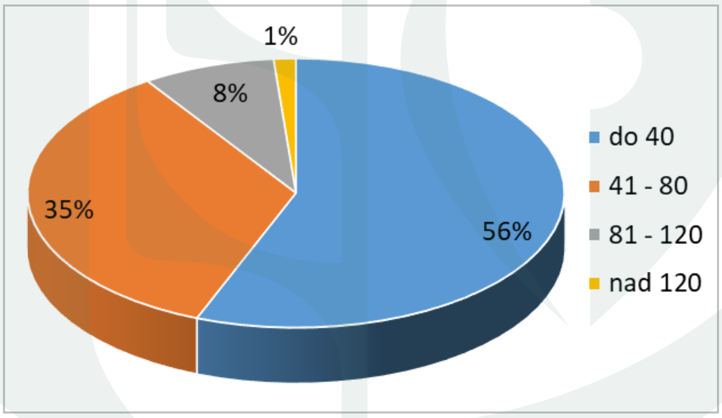
Obr. 4 Vyhodnotenie odpovedí na otázku o konzumovaní biopotravín v rodine
Zdroj: prieskumný dotazník, vlastné spracovanie

V ďalšej otázke sme sa respondentov pýtali, ako často nakupujú biopotraviny (Obr. 5). Vo výskumnej vzorke spolu 37 % študentov odpovedalo, že nakupujú biopotraviny raz za týždeň (21 %) alebo raz za mesiac (16 %). Výnimočne nakupuje biopotraviny 41 % študentov, čo môžeme dať do súvislosti s tým, že nákupy realizujú iní členovia rodiny. 20 % respondentov nenakupuje biopotraviny vôbec a 2 % študentov na túto otázku neodpovedali.



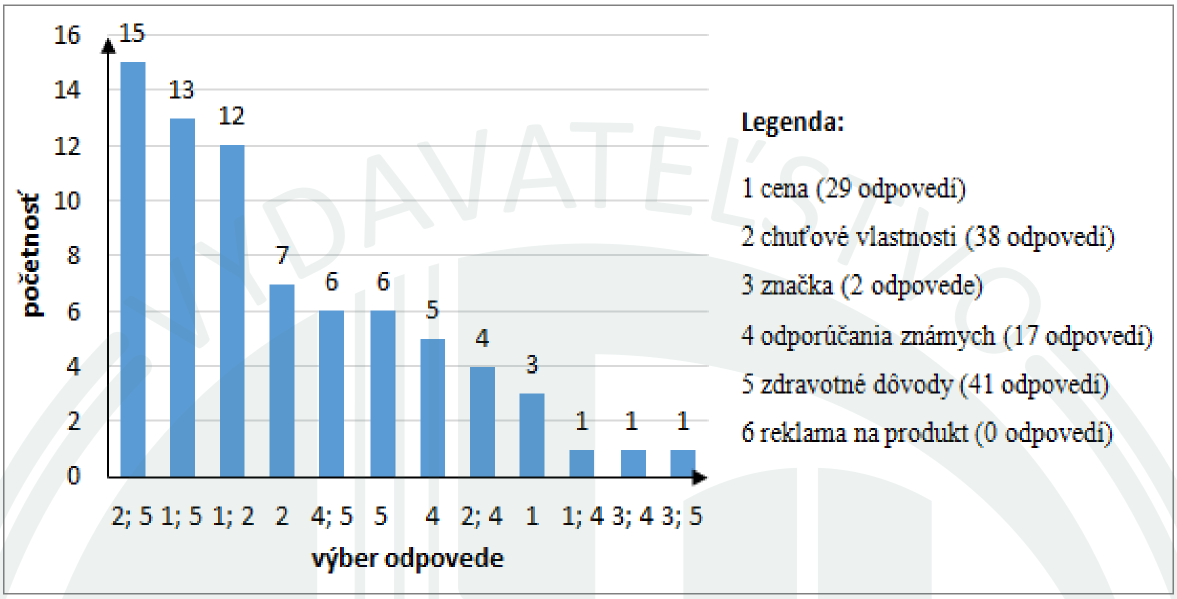
Obr. 5 Vyhodnotenie odpovedí o frekvencii nákupu biopotravín
Zdroj: prieskumný dotazník, vlastné spracovanie

Ceny biopotravín sú zvyčajne vyššie v porovnaní s cenami tradičných potravín. Preto sme do dotazníka zaradili otázku, aby študenti odhadli výšku svojich výdavkov na potraviny za obdobie jedného týždňa, pričom výdavky mali zhodnotiť spolu pre tradičné potraviny aj biopotraviny. Z výsledkov vyplýva (Obr. 6), že výdavky do výšky 40 € uviedlo 56 % respondentov. Výdavky na potraviny v rozsahu 41 – 80 € deklarovalo 35 % študentov. Výšku výdavkov v rozsahu 81 – 120 € má 8 % študentov a výdavky nad 120 € za týždeň uviedlo 1 % respondentov. Vysokoškolskí študenti ešte nemajú tradičné zamestnanie, ktoré by im prinášalo potrebné finančné zdroje. Výdavky na stravu platia buď z príspevkov, ktoré im dávajú rodičia, alebo niektorí z nich majú príjmy z individuálnych brigád.



Obr. 6 Vyhodnotenie odpovedí o finančných výdavkoch na potraviny spolu za týždeň
Zdroj: prieskumný dotazník, vlastné spracovanie

V poslednej otázke, ktorú prezentujeme, sme žiadali respondentov, aby označili dve najviac dôležité kritériá pri nákupe biopotravín z týchto možností: cena, chuťové vlastnosti, značka, odporúčania známych, zdravotné dôvody a reklama na produkt. Výsledky sme usporiadali podľa frekvencie odpovedí, pričom vidíme, že niektorí študenti označili len jedno kritérium (Obr. 7). Z analýzy vyplýva, že za najdôležitejšie kritériá pri nákupe a konzumácii biopotravín študenti považujú: zdravotné dôvody (41 odpovedí), chuťové vlastnosti (38 odpovedí) a cenu produktu (29 odpovedí). Za nimi nasledujú kritériá v tomto poradí dôležitosti: odporúčania známych (17 odpovedí), značka produktu (2 odpovede) a reklama na produkt (0 odpovedí).



Obr. 7 Vyhodnotenie preferencií respondentov pri konzumovaní biopotravín
Zdroj: prieskumný dotazník, vlastné spracovanie

Analýza závislostí medzi vybranými odpoveďami respondentov

Naším výskumom sme hľadali odpoveď na otázku, či nakupovanie biopotravín súvisí s pohlavím respondentov. Pri overovaní uvedenej súvislosti sme použili metódou χ^2-kvadrát test štvorcovej kontingencie a pomocou nej sme zisťovali existenciu zhodnosti empirických a teoretických početností medzi kvalitatívnymi znakmi štatistického súboru. Overovali sme nasledovné hypotézy:

Hypotéza H_{01}:
Existuje zhoda empirických a teoretických početností v sledovaných kvalitatívnych znakoch pohlavie respondentov a nakupovanie biopotravín.

Hypotéza H_{02}:
Existuje zhoda empirických a teoretických početností medzi analyzovanými kvalitatívnymi znakmi: výdavky respondentov na potraviny a nakupovanie biopotravín.

V tabuľke č. 1 sú uvedené výsledky testovania nulových hypotéz, ktoré boli realizované pomocou nástrojov programu MS Excel.

Z vypočítaných výsledkov môžeme urobiť nasledovné závery:

- Keďže vypočítaná hodnota testovacieho kritéria neprekročila kritickú hodnotu (platí 0,0034 < 3,84), nulovú hypotézu H_{01} o existencii zhodnosti empirických a teoretických početností hodnotených znakov nemôžeme zamietnuť na hladine významnosti α = 0,05. Platí, že rozdiely v nakupovaní biopotravín medzi mužmi a ženami nie sú signifikantné, t.j. muži a ženy sa správajú pri nákupe biopotravín približne rovnako.

- Zo zistených výsledkov vyplýva, že aj v druhom prípade vypočítaná hodnota testovacieho kritéria neprekročila kritickú hodnotu (1,41 < 5,99). Preto na hladine významnosti α = 0,05 nemôžeme zamietnuť nulovú hypotézu H_{02} o existencii zhodnosti empirických a teoretických početností skúmaných znakov. Platí, že závislosť medzi nakupovaním biopotravín a výdavkami na potraviny nie je signifikantná.

Tab. 1 Výsledky testovania nulových hypotéz

Hypotéza H_{01}					
Experimentálne početnosti			Očakávané početnosti		
	ženy	muži		ženy	muži
nakupujem	35	11	nakupujem	35,11	10,89
nenakupujem	23	7	nenakupujem	22,89	7,11
χ^2-kvadrát test	0,0034		kritérium tab.	3,84	
p-hodnota	0,95 > 0,05				
Hypotéza H_{02}					
Experimentálne početnosti			Očakávané početnosti		
	nakupujem	nenakupujem		nakupujem	nenakupujem
do 40	25	17	do 40	25,54	16,46
41 - 80	15	11	41 - 80	15,81	10,19
81 - 120	5	1	81 - 120	3,65	2,35
χ^2-kvadrát test	1,41		kritérium tab.	5,99	
p-hodnota	0,49 > 0,05				

Zdroj: vlastné výpočty

Názory a preferencie spotrebiteľov sú dôležité pre marketingové stratégie obchodných podnikov. Výsledky prieskumov o procese rozhodovania spotrebiteľa potvrdzujú, že cena a kvalita produktu sú najdôležitejším kritériom počas nákupu (napr. [8], 81,7 %).

Kunová [6] uvádza, že sa v poslednom období vytvorili tri skupiny spotrebiteľov: prvá skupina sa orientuje hlavne na výšku ceny potravín a spotrebitelia nakupujú predovšetkým v rámci akciových ponúk; v druhej skupine sú spotrebitelia, ktorí uprednostňujú kvalitné potraviny a potrpia si na lahôdky, pričom cena pre nich nie je prvoradá; do tretej skupiny patria spotrebitelia, ktorí veľmi pozorne sledujú výživové hodnoty produktov a zdraviu prospešné účinky.

ZÁVER

V príspevku sme prezentovali výsledky realizovaného prieskumného dotazníka, ktorý bol zameraný na vyhodnotenie názorov mladej generácie respondentov – študentov na vysokej škole na konzumovanie a nákup biopotravín. Z výsledkov dotazníka vyplýva, že respondenti poznajú biopotraviny, nakupujú ich a konzumujú, pričom konzumácia biopotravín je spojená aj s ostatnými členmi rodiny. Ďalej sme skúmali súvislosť medzi nakupovaním biopotravín a pohlavím respondentov, pričom sme použili metódou χ^2-kvadrát testu štvorcovej kontingencie. Na zvolenej hladine významnosti α = 0,05 bola zistená zhodnosť empirických a teoretických početností medzi uvedenými kvalitatívnymi znakmi. Obdobne, bola potvrdená zhodnosť empirických a teoretických početností medzi výdavkami respondentov na potraviny a nakupovaním biopotravín.

Nákupné správanie sa spotrebiteľov je pod vplyvom viacerých faktorov, ktoré sa prejavujú pri realizácii nákupu a pri výbere produktu. Pri nákupe biopotravín je v mnohých prípadoch hnacím motorom kritérium zdravotných dôvodov a dôraz na ponuku vždy čerstvého a kvalitného sortimentu bioproduktov. Súčasná mladá generácia si vytvára vlastný životný štýl a zaujíma sa aj o zdraviu prospešné stravovanie, pričom do tejto oblasti patria aj bioprodukty slovenského alebo zahraničného pôvodu.

V názoroch a preferenciách spotrebiteľov v oblasti nákupu a konzumácie potravín nastávajú zmeny. Biopotraviny ako jeden z trendov zdravej výživy ľudí sa na trhu s potravinami stávajú vyhľadávaným artiklom, čím sa vytvárajú nové príležitosti pre produkciu, spracovanie a predaj biopotravín.

POĎAKOVANIE

Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA č. 029SPU-4/2018: „Digitálne edukačné aplikácie v matematike".

Literatúra

[1] Balážová, Ž., Gálová, Z., Vivodík, M., Petrovičová, L. & Gregáňová, R. H. (2017). Molecular variability of oat based on gene specific markers. *Potravinárstvo:* Slovak Journal of Food Sciences, 11(1), 332-337.

[2] Gurčík, Ľ., Dobošová, Ľ., Richter, M., Kubicová, Ľ. & Dobák, D. (2016). Controlling as a management system of milk production and consumption in Slovakia and the Czech Republic. In Proceedings: *The agri-food value chain: challenges for natural resources management and society: International scientific days 2016*, Nitra: Slovak University of Agriculture, pp.19-20.

[3] Jarossová, M. A. (2015). Nákupné správanie spotrebiteľov a ich postoje k biopotravinám, tradičným a funkčným potravinám. *Studia commercialia Bratislavensia*, vol. 8, no. 31, pp. 372-383. Dostupné 2019-04-09 na: https://of.euba.sk/www_write/files/veda-vyskum/scb/vydane-cisla/2015-03/scb0315_Jarossova.pdf

[4] Kita, J. (2005). *Marketing*. Bratislava: Iura Edition. 431 s.

[5] Kozelová, D., Zajác, P., Matejková, E., Zeleňáková, L., Lopašovský, Ľ., Mura, L., Čapla, J. & Vietoris, V. (2011). Perception of bio-food labeling by consumers in Slovakia. *Potravinarstvo:* Slovak Journal of Food Sciences, 5(1), 33-38.

[6] Kunová, V. (2011). *Zdravá výživa.* 2. přepracované vydání. Grada Publishing as.

[7] Nagyová, Ľ. a kol. (2014). *Marketing*. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita. 460 s.

[8] Ondreášová, F. (2018). *Vizuálny merchandising vo vybranej maloobchodnej prevádzke*. Bakalárska práca. Nitra: SPU, 59 s.

[9] Pietriková, M. & Országhová, D. (2019). Comparative assessment of factors determining the decision-making of respondents. In *Aplimat 2019*. Bratislava: Slovenská technická univerzita, s. 923-931.

[10] *Zákon č. 152/1995 Z. z. zo dňa 25. júla 1995 Národnej rady Slovenskej republiky o potravinách a o zmene a doplnení niektorých zákonov.*

BIOFOOD IN NOURISHMENT OF UNIVERSITY STUDENTS (CASE STUDY)

ABSTRACT

The meal plan of young people is influenced by family habits, which are subject to various factors. Within Slovakia, there are differences in the respect of traditions that may be associated with different foods and meals. An important factor for the types of consumed food is also the financial condition of the Slovak families. The inclusion of organic food in the diet habits of young people requires increased costs for the purchase of food. The main aim of the paper was to find out and evaluate opinions on shopping and consumption of organic food in a sample of university students of the Faculty of Economics and

Management of the Slovak University of Agriculture in Nitra. Data for evaluation were obtained through a survey questionnaire, which was conducted in the academic year 2018/2019. The results show that all students from the research group know organic food, while part of students buy organic food (61%) and also consume within the family (72%). Testing of formulated hypotheses was carried out by method of χ^2-squared test, but in neither case was the dependence between the investigated features in the research sample confirmed.

KEYWORDS: bio-food, survey questionnaire, university students, χ^2- square contingency test

Kontaktné adresy

Doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.,
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu, Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, Tr. A. Hlinku 2, 949 76 Nitra, Slovenská republika,
E-mail: dana.orszaghova@uniag.sk

Ing. Pavel Fľak, Dr.Sc.,
Komisia pre biometriku, Slovenská akadémia pôdohospodárskych vied,
Hlohovecká 2, 951 41 Lužianky, Slovenská republika,
E-mail: flakpavel1@gmail.com

Katedra matematiky

Univerzitné matematické vzdelávanie ako základ pre inovácie vo vede a technike

MATEMATIKA AKO SÚČASŤ EKONOMICKÝCH ANALÝZ (PRÍPADOVÁ ŠTÚDIA)

Viera Papcunová, SK
Jarmila Hudáková, SK

ABSTRAKT

Internetové nakupovanie je jav, ktorý v súčasnosti rýchlo rastie, no napriek tomu stále existuje veľký potenciál pre ďalší rozvoj elektronického obchodu. Cieľom príspevku je analyzovať preferencie on – line nakupovania obyvateľov v podmienkach Slovenska vo vybraných vekových kategóriách za obdobie rokov 2012 - 2018. V rámci analýz sme použili základné charakteristiky popisnej štatistiky. Z analýzy vyplynulo, že v rámci jednotlivých vekových skupín dochádza k zmenám preferencií v rámci on – line nakupovaných tovarov a služieb. Kým u mladších vekových kategórii prevláda nákup predovšetkým športových potrieb a odevov, u starších vekových kategórií sa do popredia dostáva tovar pre domácnosť, či dovolenka. Úplne iné preferencie zaznamenávame vo vekovej kategórii 65-74 rokov, kedy nie je možné identifikovať dominantné postavenie jedného produktu, ktorí by obyvatelia v tejto vekovej kategórii preferovali v rámci on – line nákupu.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: on – line nakupovanie, preferencie zákazníkov, internet

ÚVOD

Proces informatizácie spoločnosti prebiehajúci v krajinách EÚ prispieva k formovaniu dynamicky sa rozvíjajúceho ekonomického prostredia, do ktorého sa aj Slovenská republika zaradila. Na Slovensku sú hlavnými prekážkami pre rozvoj internetu hlavne vysoké ceny počítačov a pripojenia na internet. Ukazuje sa však, že prekážkou je aj tzv. počítačová (digitálna) gramotnosť – znalosť práce s počítačmi a záujem o používanie počítača a internetu vôbec. Uvedené zistenia vychádzajú z ďalšej vlny voľnopredajnej štúdie iOmnibus o internete v Slovenskej republike spoločnosti TNS SK [8]. Informačná spoločnosť je [12] spojená s novým druhom požiadaviek na vedomostnú úroveň a zručnosti informačných technológií. Intenzívne využívanie nástrojov informačných technológií vo vzdelávaní pomáha rozvíjať zručnosti rôzne typy zručností ako je napr. kritické myslenie, flexibilné rozhodovanie, zvládanie neočakávaných situácií, efektívna komunikácia atď. Úloha internetu, ako prostredia na zdieľanie a šírenie dát rozličného charakteru, je v súčasnej dobe nepopierateľná. Okamžitá dostupnosť dát predstavuje dôležitý moment pri rozhodovacích procesoch v modernej spoločnosti [1]. V prvej fáze sa internet využíval iba ako komunikačný prostriedok (hlavne e-maily). Skoro paralelne začali vznikať prvé webové stránky firiem, ktoré boli vytvárané iba ako základné prezentácie podávajúce informácie o ponuke a kontaktných údajoch. V ďalšej fáze boli na webové stránky postupne pridávané funkcionality umožňujúce on-line objednávanie tovaru a služieb. Práve táto fáza bola dôležitá na podporu on-line obchodných aktivít, pretože umožnila objednávať tovary a služby len komunikáciou cez webové rozhranie. Poslednou fázou vývoja bolo prepojenie webových serverov s informačnými systémami firiem, čím sa začali vyvíjať po častiach, neskôr úplne automatizované a integrované systémy [14]. Dnešným hitom sú samo konfigurovateľné siete (rekonfigurovateľné siete), ktoré sa dokážu autonómne konfigurovať, na základe zariadení skutočne pripojených k sieti. V súčasnosti najkomplexnejšou svetovou sieťou je internet. Ak prepojenie signálov, digitálnych modelov a dátové prepojenie zariadení a ich senzorických systémov zabezpečuje internet, označuje sa ako internet vecí (Internet of Things - IoT) [5]. Avšak je dôležité poukázať na skutočnosť, že súčasná doba disponuje čoraz väčším množstvom technických vymožeností, ktoré pomáhajú človeku zvládať rýchle tempo, podať vysoký výkon, mať mnohé služby, činnosti či ľudí dostupných a takpovediac po ruke – online. Okrem celého radu pozitív má táto on – line doba prináša aj riziko vo forme možnosti vzniku závislosti od internetu [6].

Počas posledných niekoľkých rokov sa on-line nakupovanie stalo bežnou súčasťou nášho života. Nové tisícročia prinieslo intenzívny rast elektronického podnikania. V porovnaní s tradičným maloobchodom on-line nakupovanie poskytuje zákazníkom viac výhod, ktoré sú spojené s úsporou času, s ponukou širokého sortimentu výrobkov, porovnávaním cien produktov a pod. [13]. On - line nakupovanie zahŕňa všetky obchodné činnosti a komunikácie medzi kupujúcimi a predávajúcimi a považuje sa za elektronickú bránu, ktorú je možné použiť na oslovenie zákazníkov [11]. Dôležitý je prvý on – line nákup, keďže v prípade pozitívnej skúsenosti bez komplikácií tento spôsob nákupu si väčšinou získa dôveru spotrebiteľa, a ten sa v pomerne krátkom čase rozhodne využiť túto možnosť opakovane [3]. Potvrdzuje to aj [10] vo svojej empirickej štúdii uskutočnenej na 273 zákazníkoch, ktorí nakupovali online. Empirické zistenia tejto štúdie poukazujú na to, že postoje spotrebiteľov k online nakupovaniu sú dané dôverou a ponúkanými výhodami. Dôvera a ponúkané výhody sú preto podľa výsledkov kľúčovými indikátormi postojov spotrebiteľov voči on - line nakupovaniu. Ďalej autori zistili, že vyššia úroveň vnímanej kvality webu vedie k vyšším úrovniam dôvery v internetovú stránku zo strany zákazníkov tým aj k on - line nakupovaniu. Internetoví predajcovia teda musia navrhnúť svoje webové stránky takým spôsobom, aby boli užívateľsky príjemné [16]. Jedinečná charakteristika on- line nakupovania naznačuje, že zákazníci hodnotia webové stránky na základe prezentovaných informácií o ponúkaných službách resp. produktoch (napr. virtuálne prehliadky, podrobné informácie o produktoch, hodnotenia zákazníkov a pod.). Preto je dôležité pochopiť správanie spotrebiteľov v online prostredí a vypracovať stratégie na zvýšenie lojality zákazníkov voči webovej stránke [2].

MATERIÁL A METÓDY

Cieľom príspevku je analyzovať preferencie on – line nakupovania v podmienkach Slovenska vo vybraných vekových kategóriách za obdobie rokov 2012 - 2018. V rámci porovnávania postavenia Slovenska v on – line nakupovaní v krajinách EÚ sme použili údaje z Eurostatu - prieskum Spoločenstva o využívaní IKT v domácnostiach a jednotlivcami vo veku 16-74 rokov. Údajovú základňu za Slovensko predstavovali údaje získané zo ŠÚ SR, v rámci ukazovateľa – nakupovanie cez internet pre súkromnú spotrebu vo vybraných vekových kategóriách. Analýzy a výsledky boli spracované prostredníctvom MS Excel. V rámci hodnotenia sme použili nasledovný matematický vzťah:

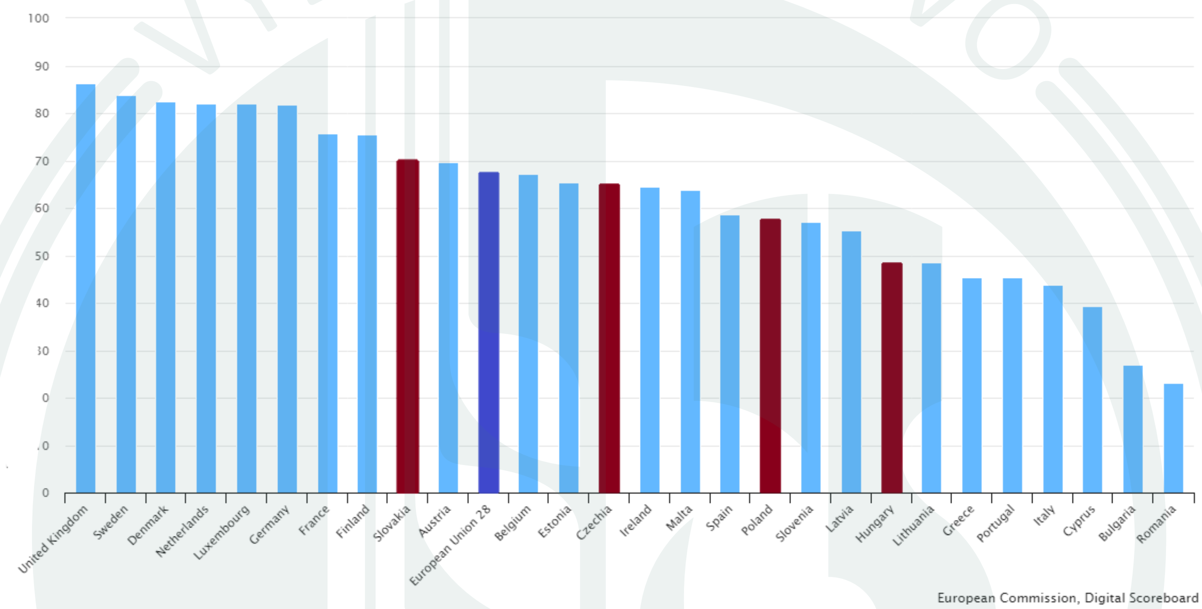
$$c = \frac{a}{b}$$

a = počet obyvateľov v danej vekovej kategórii

b = počet obyvateľov v danej vekovej kategórii, ktorí nakupovali on – line tovary a služby

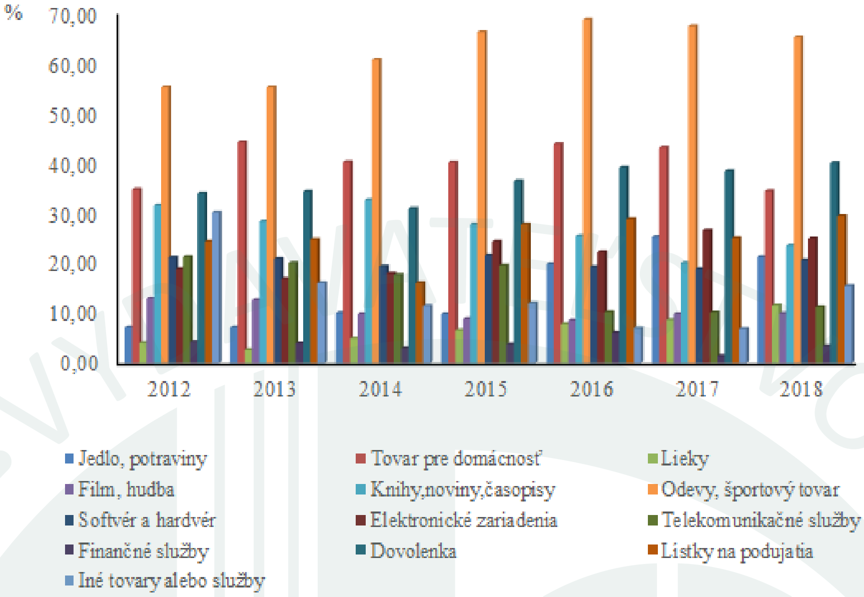
VÝSLEDKY A DISKUSIA

Vývojom nových IT technológií sa rozširuje aj portfólio tovarov a služieb, ktoré je možné nakúpiť on – line. V rámci jednotlivých krajín EÚ – 28 z celkového počtu obyvateľov vo veku 16-74 rokov najviac ľudí nakupovalo on – line v Spojenom kráľovstve (86,23%). Je to vysoko nad priemerom EÚ – 28, ktorý bol v roku 2018 na úrovni 67,56% (obrázok 1). V rámci krajín V4 využilo internet na nákup tovarov a služieb najviac obyvateľov na Slovensku (70,15%), o niečo menej to bolo v Českej republike (65,09%). Najmenej obyvateľov, ktorí využívalo internet na on – line nákup v rámci krajín V4 bolo v Maďarsku (48,59%).



Obr. 1 Podiel obyvateľov vo veku 16-74 rokov v jednotlivých krajinách EÚ, ktorí nakupovali on – line tovary a služby v roku 2018 (v %)
(Zdroj: [4])

V rámci Slovenskej republiky obyvatelia vo veku 16-74 rokov počas sledovaného obdobia 2012 – 2018 najčastejšie nakupovali cez internet odevy a športový tovar (v priemere to predstavovalo 62,66%). Čoraz častejšie sa do popredia dostáva aj on – line nakupovanie jedla a potravín. Veľké % reštaurácii ponúka svoje produkty aj prostredníctvom on – line objednania. Nákup potravín on – line ponúkajú predovšetkým veľké obchodné reťazce, ale objavujú sa aj menšie firmy, ktoré ponúkajú tzv. „debničkový predaj" ovocia a zeleniny. Z historického pohľadu nie je pre Slovákov takýto spôsob nakupovania jedna a potravín typický, ale z analýzy vyplýva, že aj takýto spôsob nakupovania sa začína udomácňovať v našich podmienkach. Kým v roku 2012 využilo túto možnosť nákupu iba 7,10% obyvateľov, už v roku 2018 to bolo až 21,20%. Potvrdzuje to aj [9], ktorá uvádza, že stále viac obchodníkov s potravinami ponúkajú on - line alternatívu vedľa svojich tradičných offline supermarketov. Kým počet on - line nakupujúcich sa zvyšuje rýchlym tempom rastu, stále existujú veľké rozdiely vo frekvencii nakupovania on - line a v dôsledku toho sa mení aj úroveň skúseností s nákupom on - line potravín. Výsledky prieskumu, ktorí autorky uskutočnili v podmienkach Spojeného kráľovstva poukazujú na skutočnosť, že zákazníci na začiatku on-line nakupovania majú tendenciu vybrať si internetový obchod patriaci do toho istého reťazca ako ich preferovaný offline obchod.

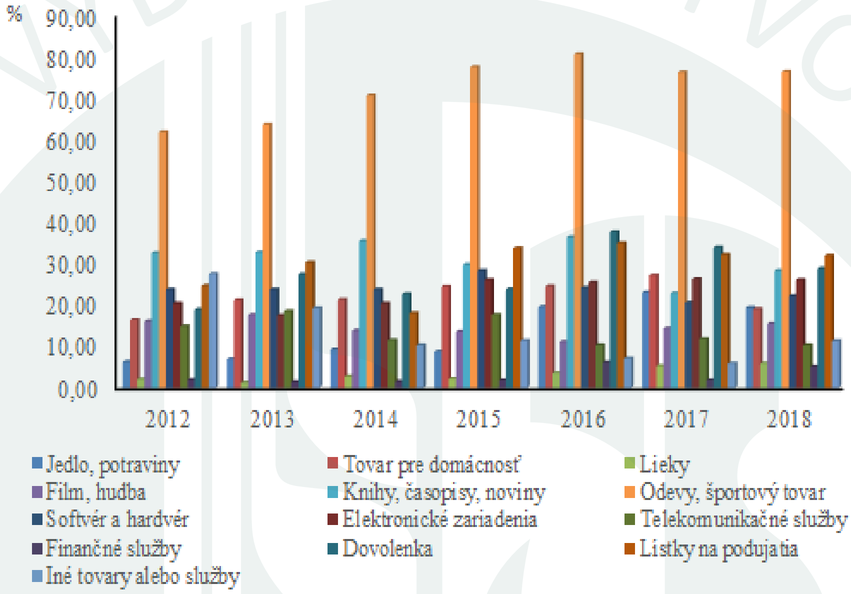


Obr. 2 Podiel obyvateľov vo veku 16-74 rokov na Slovensku, ktorí nakupovali on – line tovary a služby v období rokov 2012-2018 (v %)
(Zdroj: [15])

Ďalšou novinkou v nákupe cez internet v slovenských podmienkach je nákup liekov resp. výživových doplnkov, ktoré nie sú viazané na lekársky predpis. V roku 2012 využilo takúto možnosť nákupu 4% obyvateľov, no už v roku 2018 to bolo 11,50% obyvateľov. Pokiaľ nákup prebieha cez certifikované stránky ponúkajúce tieto produkty je tento nákup z pohľadu kupujúceho bezpečný, problém môže nastať pri nákupe predovšetkým zahraničných výživových doplnkov, ktoré nemusia byť na našom trhu certifikované.

Rastúce využívanie sociálnych médií (Facebook, YouTube, atď.) je v súčasnosti ovplyvnené rýchlym rastom nových informačných a komunikačných technológií. Začiatkom roka 2015 bolo na svete 1,39 miliardy používateľov Facebooku. Sociálne médiá umožňujú spájať ľudí, ktorí zdieľajú informácie a aktivity bez ohľadu na politické, ekonomické a geografické hranice [7]. Tento trend potvrdzuje aj on – line nákup v oblasti rôznych aplikácii na prehrávanie hudby, filmov, e – kníh aj v podmienkach Slovenska. Po prvotnom náraste podielu obyvateľov, ktorí takýmto spôsobom nakupujú filmy, knihy, hudbu v roku 2012 (31,50% obyvateľov) sledujeme mierny pokles záujmu v nasledujúcich rokoch o tento spôsob nákupu. Obdobný trend je možné sledovať aj pri nákupe hardvéru a softvéru. Naopak mierne rastie záujem o on – line nákup elektronických zariadení (v roku 2018 nárast v porovnaní s rokom 2012 predstavoval 32,44%). Populárnou službou sa stáva aj nákup telekomunikačných služieb ponúkaných prostredníctvom rôznych mobilných operátorov pôsobiacich na trhu. V priemere za sledované obdobie takúto možnosť využilo 15% obyvateľov. On - line nákup prenikol aj do sféry finančných služieb. Finančné „domy" ponúkajú prostredníctvom on - line nákupu predovšetkým služby v oblasti poistenia alebo v oblasti nákupu akcií. Zatiaľ však táto služba nie je v podmienkach Slovenska veľmi využívaná, v priemere ju za sledované obdobie využilo iba 3,5% obyvateľov. Iná situácia je v oblasti nákupu dovoleniek. Čoraz viac dovolenkujúcich nakupuje komplexný dovolenkový produkt on – line prostredníctvom cestovných kancelárii alebo cestovných agentúr, alebo si zabezpečuje jednotlivé služby súvisiace s dovolenkou (ubytovanie, stravovanie, doprava, doplnkové služby) priamo u poskytovateľa danej služby. Najväčší záujem je o nákup leteniek, príp. lístkov na autobusovú a vlakovú dopravu a o nákup služieb v oblasti ubytovania.

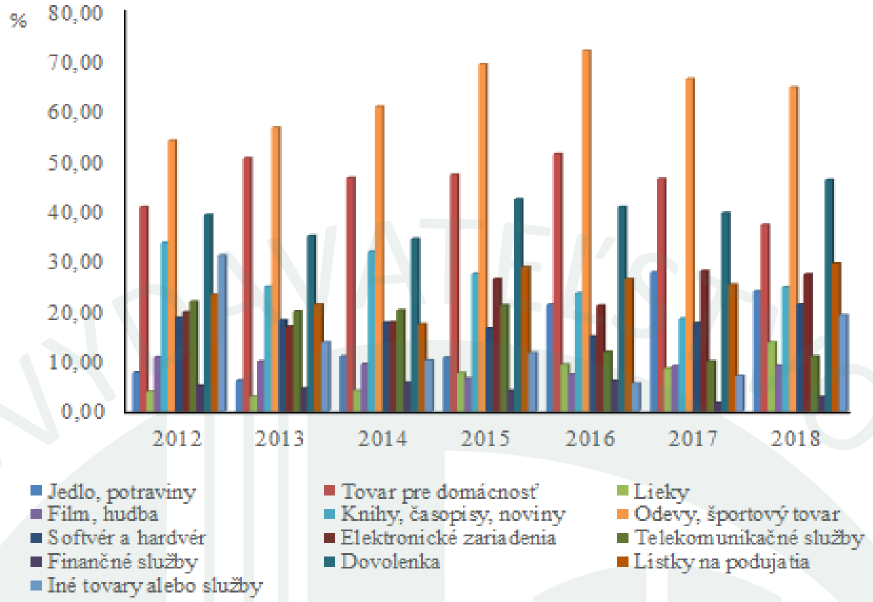
Najčastejším spôsobom, ktorí využívajú obyvatelia pri hľadaní ubytovania sú portály, ktoré poskytujú komplexnú informáciu o ubytovacom zariadení častokrát spojenú aj s recenziou daného zariadenia (napr. portál booking.com, trivago.sk a pod.). Počas sledovaného obdobia záujem o takúto službu mierne narastal. Kým v roku 2012 túto službu využilo 33,9% obyvateľov, už v roku 2018 to bolo 40% obyvateľov. V poslednom období on – line nakupovanie zasiahlo aj kultúrnu a športovú oblasť. Fungujú špecializované portály (napr. ticket portal, predpredaj.sk a pod.), ktoré ponúkajú možnosť zakúpenia lístkov na rôzny typy hudobných, divadelných či športových podujatí. V roku 2012 túto službu využilo 24,30% obyvateľov a v roku 2018 už 29,40% (obrázok 2).



Obr. 3 Podiel obyvateľov vo veku 16-24 rokov na Slovensku, ktorí nakupovali on – line tovary a služby v období rokov 2012-2018 (v %)
(Zdroj: [15])

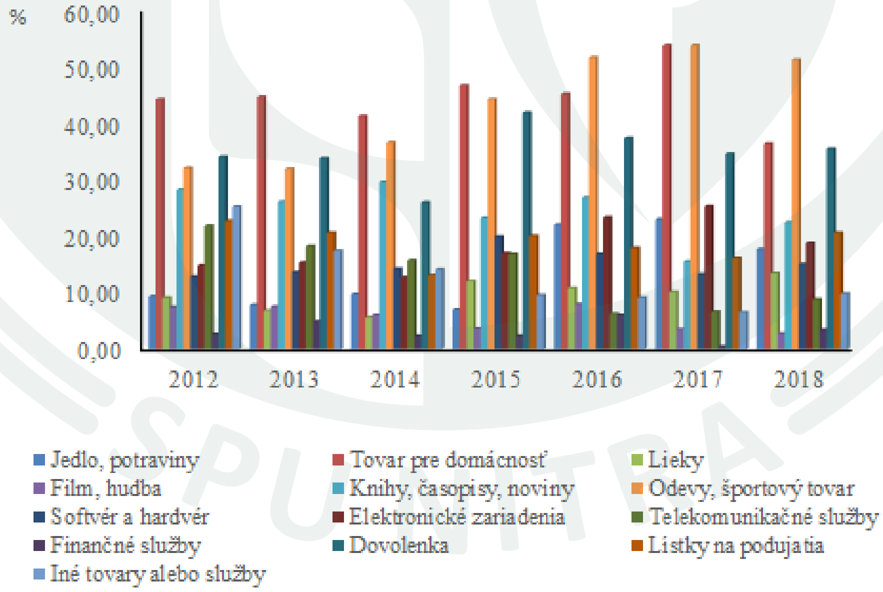
V rámci jednotlivých vekových skupín môžeme sledovať určité zmeny v preferenciách on-line nakupovania. Vo vekovej kategórii 16-24 najväčší podiel obyvateľov nakupuje odevy a športový tovar. Kým v roku 2012 takýmto spôsobom nakupovalo 61,70% obyvateľov, už v roku 2016 to bolo 80,60% obyvateľov. Významnou kategóriou, ktorú nakupuje on – line táto veková kategória sú knihy, noviny a časopisy. V tejto vekovej kategórii drvivú väčšinu tvoria študenti stredných a vysokých škôl, ktorí si prostredníctvom on – line nakupovania zabezpečujú aj študijné materiály. Rastúci trend on – line nákupov zaznamenávame aj v rámci nákupu lístkov na rôzne typy podujatí. V roku 2012 takúto možnosť nákupu využilo 24,60% a v roku 2018 už 31,80% (obrázok 3).

Vekovú kategóriu 35-44 predstavujú predovšetkým ľudia, ktorí už majú ukončené vysokoškolské vzdelanie, resp. ľudia, ktorí po ukončení povinnej školskej dochádzky, či strednej školy sa zaradili do pracovného procesu. Ich preferencie on – line nakupovania sa v porovnaní s vekovou kategóriou 16-24 rokov výraznejšie zmenili. Naďalej top on – line produktom, ktorí nakupujú je športový tovar a odevy, ktorí však v porovnaní s predchádzajúcou vekovou kategóriu vykazuje kolísavý trend v sledovanom období. Avšak v porovnaní rokov 2012 a 2018 zaznamenávame nárast on – line nakupovania v tejto kategórii o 19,66% (obrázok 4).



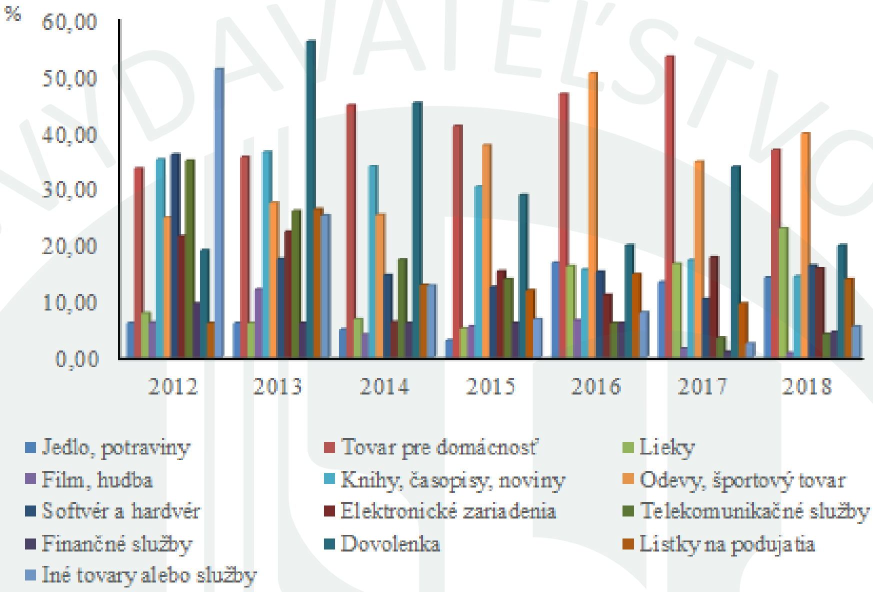
Obr. 4 Podiel obyvateľov vo veku 35-44 rokov na Slovensku, ktorí nakupovali on – line tovary a služby v období rokov 2012-2018 (v %)
(Zdroj: [15])

Druhým najčastejším tovarom, ktorý nakupuje táto veková kategória je tovar pre domácnosť, čo je dôsledkom skutočnosti, že mnohí obyvatelia v tomto vekovom rozpätí si zakladajú rodiny, resp. kupujú nehnuteľnosti, ktoré si následne zariaďujú. O niečo menší podiel v rámci on – line nakupovania v porovnaní s kategóriou tovar pre domácnosť tvorí on – line nákup dovoleniek. V tejto kategórii sledujeme výrazný nárast počtu nakupujúcich, kým v roku 2012 si takýto produkt zakúpilo 39,10% obyvateľov, v roku 2018 to už bolo 46,10%.



Obr. 5 Podiel obyvateľov vo veku 55-64 rokov na Slovensku, ktorí nakupovali on – line tovary a služby v období rokov 2012-2018 (v %)
(Zdroj: [15])

V rámci vekovej kategórie 55-64 ročných obyvateľov nastala ešte výraznejšia zmena v prefencii on – line nakupovania tovarov pre domácnosť v porovnaní s predchádzajúcou vekovou kategóriou. Z obrázku 5 však vyplýva, že kým nákup tovarov pre domácnosť vykazuje počas sledovaného obdobia viac kolísavý trend, nákup športového tovaru a odevov s výnimkou rokov 2013 a 2018 zaznamenáva každoročný nárast. Obdobne kolísavý trend nákupu zaznamenávame aj v kategórii dovolenka.



Obr. 6 Podiel obyvateľov vo veku 65-74 rokov na Slovensku, ktorí nakupovali on – line tovary a služby v období rokov 2012-2018 (v %)
(Zdroj: [15])

Veková kategória 65-74 v podmienkach Slovenska predstavuje ľudí v poproduktívnom veku. Preferencie on – line nakupovania sú v tejto kategórii úplne iné v porovnaní s predchádzajúcimi vekovými kategóriami obyvateľov. Každý zo sledovaných produktov vykazuje skôr kolísavý trend a tak nie je možné určiť dominantné kategórie tovarov a služieb, ktoré táto veková kategória obyvateľov nakupuje. Výrazne klesá nákup odevov a športového tovaru a do popredia sa dostáva skôr on – line nákup dovoleniek, kníh, novín a časopisov resp. telekomunikačných služieb. Táto zmena preferencií on – line nakupovania v tejto vekovej kategórií súvisí s prístupom seniorov k životu a ich zdravotným stavom. Do určitého veku aj títo ľudia radi cestujú a spoznávajú nové krajiny, avšak neskôr skôr preferujú pobyt v domácom prostredí a venujú sa iným aktivitám ako je cestovanie.

ZÁVER

Preferencie on – line nakupovania sa menia v rámci jednotlivých vekových kategórií. Kým vo vekovej kategórii 16-24 rokov bol prioritou on – line nakupovania nákup odevov a športových potrieb, v nasledujúcich dvoch vekových kategóriách 35-44 a 55-64 rokov sa už začínajú objavovať kategórie nákupov ako tovar pre domácnosť či dovolenka. Úplne iné preferencie zaznamenávame vo vekovej kategórii 65-74 rokov, kedy nie je možné identifikovať dominantné postavenie jedného produktu, ktorí by obyvatelia v tejto vekovej kategórii preferovali a ide skôr o nákup produktov resp. služieb v rámci voľnočasových aktivít.

LITERATÚRA

[1] Bačík, V. (2007). Využitie vybraných technológií pre distribúciu výsledkov zo sčítania obyvateľov, domov a bytov na príklade Bratislavských obcí. Dostupné 2019-10-5 na http://sodbtn.sk/bacik1/stiahnutie/bacik_olomouc07.pdf

[2] Bilgihan, A. & Bujisic, M. (2015). The effect of website features in online relationship marketing: A case of online hotel booking. *Electronic Commerce Research and Applications*, 14 (4), 222-232. DOI: https://doi.org/10.1016/j.elerap.2014.09.001

[3] Dorčák, P. (2012). *eMarketing. Ako osloviť zákazníka na internete*. Prešov: EZO.sk.

[4] Eurostat. Prieskum Spoločenstva o využívaní IKT v domácnostiach a jednotlivcami vo veku 16-74 rokov.

[5] Gregor, T., Magvaši, V. & Gregor, M. (2019). Internet vecí (Internet of Things-IoT) Dostupné 2019-10-5 na https://www.researchgate.net/profile/Milan_Gregor/publication/280731091_Internet_veci_IoT/links/55c380b908aea2d9bdc1be79/Internet-veci-IoT.pdf

[6] Hupková, I. (2017). Internet a on – line závislosti. *Sociálna prevencia*, 2 (2017), 27-30.

[7] Kajanová, H. (2015). Využívanie sociálnych médií vo vzdelávaní v 21. storočí. *Social & Economic Revue*, 13 (2), 80-86.

[8] Korcová, Z. (2016). Informačná spoločnosť a SR. Dostupné 2019-10-5 na http://www.slpk.sk/eldo/ax_10/sekcia6/08.pdf

[9] Melis, K., Campo, K, Breugelmans, E. & Lamey, L. (2015). The Impact of the Multi-channel Retail Mix on Online Store Choice: Does Online Experience Matter? *Journal of Retailing* 91(2), 272-288, DOI: https://doi.org/10.1016/j.jretai.2014.12.004

[10] Mutaz M. Al-Debei, Mamoun N. Akroush, & Mohamed Ibrahiem Ashouri, (2015). Consumer attitudes towards online shopping: The effects of trust, perceived benefits, and perceived web quality, *Internet Research*, 25 (5), 707-733. DOI: https://doi.org/10.1108/IntR-05-2014-0146

[11] Norris, M., West, S., & Gaughan, K. (2001). *E-Business Essentials: Technology and Network Requirements for the Electronic Marketplace*. Chichester: Wiley.

[12] Országhová, D., Hornyák Gregáňová, R. & Tóthová, D. (2017). Mathematics Education of Economists and Managers with the Support of Information Technology. In INTED2017: 11th International Technology, Education and Development Conference. s. 6523-6530

[13] Simová, J. & Cinkánová, Ľ. (2016). Attributes Contributing to Perceived Customer Value in the Czech Clothing On-Line Shopping. *E+M*, 3 (XIX), 195-206. DOI 10.15240/tul/001/2016-3-013

[14] Suchánek, P. (2012). *E-commerce, elektronické podnikání a koncepce elektronického obchodování*. Praha: Ekopress.

[15] ŠÚ SR. Nakupovanie cez internet pre súkromnú spotrebu.

[16] Yi JinLima, Abdullah Osman Shahrul Nizam Salahuddin, Abdul RahimRomle & Safizal Abdullah (2016). Factors Influencing Online Shopping Behavior: The Mediating Role of Purchase Intention. *Procedia Economic and Finance*, 35 (2016), 401-410. DOI: https://doi.org/10.1016/S2212-5671(16)00050-2

MATHEMATICS AS A PART OF ECONOMIC ANALYZES (CASE STUDY)

ABSTRAKT

Internet shopping is a phenomenon which is currently growing rapidly, but there is still great potential for its further development. The aim of the paper is to analyse the preferences of on - line shopping in the conditions of Slovakia in selected age categories for the period 2012 - 2018. In the analysis we used the basic characteristics of descriptive statistics. The analysis showed that on - line preferences within individual age groups are being changed. While the purchase of mainly sporting goods and clothing predominates in younger age categories, household or holiday goods are at the forefront in older age categories. We find completely different preferences in the 65-74 age group, when it is not possible to identify the dominant position of one product that they prefer to buy them on - line.

KEY WORDS: on – line shopping, preferences of customers, internet

Kontaktná adresa
doc. Ing. Viera Papcunová, PhD.
Mgr. Jarmila Hudáková, PhD., MBA
Ústav ekonomiky a manažmentu
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr.A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovenská republika
Email: vpapcunova@ukf.sk, jhudakova@ukf.sk

Katedra matematiky

Univerzitné matematické vzdelávanie
ako základ pre inovácie vo vede a technike

SEPAROVATEĽNÉ DIFERENCIÁLNE ROVNICE VO VZDELÁVANÍ NA SPU V NITRE

Tomáš Pechočiak, SR

ABSTRAKT

Ekonomické, štatistické, fyzikálne, biologické a iné procesy a javy sa dajú charakterizovať pomocou veličín, ktoré vieme matematicky vyjadriť. Závislosť medzi veličinami x a y môžeme vyjadriť funkciou $y = f(x)$. Zmena veličiny y v závislosti od zmeny veličiny x sa dá vyjadriť pomocou derivácie. V mnohých úlohách z bežného života hľadáme vzťahy medzi funkciou $y = f(x)$ a jej deriváciami, ktoré sa dajú zapísať pomocou diferenciálnych rovníc. Práve diferenciálne rovnice sú súčasťou matematickej analýzy. V našom článku sa zaoberáme jedným typom diferenciálnych rovníc a to separovateľnými diferenciálnymi rovnicami prvého rádu. Našim cieľom je poukázať na to, že aj tieto diferenciálne rovnice majú využitie v rôznych vedných odboroch. Uvedieme niekoľko príkladov použitia týchto rovníc v ekonómii a finančníctve.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ: diferenciálna rovnica, separovateľná, dopytová funkcia, spojité úrokovanie

ÚVOD

Mnohé vlastnosti, javy, deje sa dajú opísať pomocou funkcií a ich derivácií. Derivácia funkcie znamená zmenu tejto funkcie. Napríklad pomocou prvej derivácie funkcie vieme určiť monotónnosť funkcie, čiže intervaly, na ktorých funkcia rastie alebo klesá, pomocou druhej derivácie funkcie intervaly konvexnosti a konkávnosti, tzn. akým druhom oblúka je graf funkcie alebo jeho časť na danom intervale, ak nie je priamkou. Pomocou prvej a druhej derivácie vieme nájsť lokálne extrémy funkcie, teda lokálne minimum alebo maximum, ak ho funkcia má. Zmena dráhy pri zmene času predstavuje rýchlosť pohybu, čo sa dá vyjadriť pomocou derivácie funkcie dráhy podľa času, druhá derivácia funkcie dráhy podľa času je zase zrýchlenie. Takýchto príkladov použitia derivácií vieme nájsť v každom vednom odbore.

Celý jav alebo dej sa dá popísať rovnicou, ktorá môže obsahovať premenné x a y a derivácie $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Túto rovnicu môžeme zapísať nasledovne

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

a nazývame ju diferenciálnou rovnicou n-tého rádu, pričom rád diferenciálnej rovnice určuje najvyššia derivácia nachádzajúca sa v danej rovnici.

MATERIÁL A METÓDY

Diferenciálnou rovnicou prvého rádu nazývame rovnicu

$$F(x, y, y') = 0 . \tag{1}$$

Všeobecná metóda na riešenie takejto diferenciálnej rovnice neexistuje, niekedy takáto rovnica ani nemusí mať riešenie. Napríklad rovnica $(y')^2 + x^2y^2 + 3 = 0$ nemá riešenie, o čom sa čitateľ môže veľmi ľahko presvedčiť. Ak sa dá z rovnice (1) vyjadriť y', môže ísť najčastejšie o separovanú alebo separovateľnú diferenciálnu rovnicu, homogénnu alebo lineárnu diferenciálnu rovnicu.

My sa budeme zaoberať separovateľnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu. Je to rovnica tvaru

$$p_1(x)\cdot p_2(y) + q_1(x)\cdot q_2(y)\cdot y' = 0 , \tag{2}$$

kde $p_1(x)$ a $q_1(x)$ sú funkcie s premennou *x* a $p_2(y)$ a $q_2(y)$ sú funkcie s premennou *y*. Ak platí $q_1(x)\cdot p_2(y) \neq 0$, potom rovnica (2) sa dá previesť na tvar

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \cdot \frac{q_2(y)}{p_2(y)} \cdot y' = 0 , \tag{3}$$

čo je separovaná diferenciálna rovnica prvého rádu. Deriváciu y' v rovnici (3) nahradíme výrazom $\frac{dy}{dx}$ a upravíme:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{q_2(y)}{p_2(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 ,$$

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} dx + \frac{q_2(y)}{p_2(y)} dy = 0 ,$$

$$\int \frac{p_1(x)}{q_1(x)} dx + \int \frac{q_2(y)}{p_2(y)} dy = c ,$$

$$\int \frac{q_2(y)}{p_2(y)} dy = c - \int \frac{p_1(x)}{q_1(x)} dx .$$

Po vypočítaní integrálov na obidvoch stranách poslednej rovnice si z tejto upravenej rovnice vyjadríme neznámu *y*, čo bude riešenie danej diferenciálnej rovnice (2). Daný postup riešenia si uvedieme na nasledujúcom príklade:

Príklad 1: Riešme rovnicu $2y - x^3y' = 0$.
Riešenie:

Je to separovateľná diferenciálna rovnica 1. rádu. Najskôr postupne odseparujeme premenné:

$$2y - x^3y' = 0 \ / \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{2y}{x^3} - y' = 0 \ / \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{2}{x^3} - \frac{1}{y} y' = 0 \ .$$

Toto už je separovaná diferenciálna rovnica. Vyriešme ju:

$$\frac{2}{x^3} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0 \ / \cdot dx$$

$$\frac{2}{x^3}dx - \frac{1}{y}dy = 0 \ ,$$

$$\int \frac{2}{x^3}dx - \int \frac{1}{y}dy = c \ ,$$

$$-\frac{1}{x^2} - \ln|y| = c \ ,$$

$$\ln|y| = c - \frac{1}{x^2} \ ,$$

$$|y| = e^{c-\frac{1}{x^2}} \ ,$$

$$|y| = e^{c} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \ ,$$

$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \ , \text{ kde } c_1 \in R .$$

Aplikačné úlohy sú väčšinou úlohy, ktoré sú slovným vyjadrením matematických situácií vo vzťahu k reálnym skutočnostiam, ako uvádzajú Pechočiak a Matušek [1]. Pri riešení aplikačných úloh používame nasledovný postup a tieto metódy:

1. analýza a porozumenie úlohy,
2. matematizácia danej úlohy,
3. riešenie tejto matematickej úlohy,
4. overenie a interpretácia výsledkov matematickej úlohy do aplikovanej úlohy.

VÝSLEDKY A DISKUSIA

V tejto časti uvedieme úlohy z dvoch vedných disciplín, v ktorých použijeme riešenie separovateľných diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Cenová elasticita dopytu je elasticita dopytu, pri ktorej je faktorom dopytu cena. Podľa Zentkovej [4] sa meria pomocou koeficientu cenovej elasticity dopytu, čo je vzájomný pomer relatívnej infinitezimálnej zmeny dopytovaného množstva a relatívnej infinitezimálnej zmeny ceny statku. Pri väčšine tovarov je cenová elasticita dopytu záporná, pretože s rastúcou cenou klesá dopyt a naopak. Koeficient cenovej elasticity dopytu je daný vzťahom:

$$E(q, p) = -\frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} \ ,$$

kde q je množstvo a p je cena.
Sakálová [2] uvádza nasledujúci príklad.

Príklad 2: Nájdime dopytovú funkciu, ak elasticita dopytu je daná vzťahom $\eta = -\frac{p}{100 - p}$ a vieme, že hodnota dopytu pri cene p = 36 je q(36) = 16.
Riešenie:

Vzorec na určenie elasticity pre spojitú dopytovú funkciu je $\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$. Porovnaním pravých strán tohto vzorca so zadaním dostaneme rovnicu

$$\frac{dq}{dp}\cdot\frac{p}{q}=-\frac{p}{100-p},$$

Čo je separovateľná diferenciálna rovnica 1. rádu. Riešme ju:

$$\frac{1}{q}dq=-\frac{1}{100-p}dp,$$

$$\int\frac{1}{q}dq=-\int\frac{1}{100-p}dp,$$

$$\ln q=\ln(100-p)+c.$$

Položme $c=\ln c_1$ a upravme:

$$\ln q=\ln(100-p)+\ln c_1,$$

$$\ln q=\ln c_1\cdot(100-p),$$

$$q=c_1\cdot(100-p). \qquad (4)$$

Pre p = 36 je q(36) = 16, čo dosadíme do vzťahu (4) a vyjadríme c_1:

$$16=c_1\cdot(100-36) \quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{1}{4}.$$

Túto hodnotu dosadíme do vzťahu (4):

$$q=\frac{1}{4}\cdot(100-p),$$

čo je dopytová funkcia pre dané hodnoty.

Príklad 3: Dokážme, že spojité úrokovanie sa riadi zákonom exponenciálneho rastu.
Riešenie:

Touto problematikou sa zaoberala napríklad aj Urbaníková [3]. Na začiatku investujeme kapitál K_0 s ročnou úrokovou sadzbou i, pričom úroky sa počítajú m-krát do roka. Za t rokov dosiahne kapitál hodnotu K_t. Úroková perióda Δt má dĺžku $\frac{1}{m}$, keďže úroky sa pripisujú m-krát do roka. Nárast kapitálu ΔK, teda úrok za periódu Δt, je daný vzťahom

$$\Delta K=K(t+\Delta t)-K_t.$$

Úrok ΔK za ten istý čas je priamo úmerný začiatočnej hodnote kapitálu, úrokovej miere a času, teda

$$\Delta K=K(t)\cdot i\cdot\Delta t,$$

odkiaľ po úprave dostaneme

$$\frac{\Delta K}{\Delta t}=K(t)\cdot i \qquad (5)$$

Ak predpokladáme, že úrok sa bude pripisovať spojite, čiže časový interval sa bude zmenšovať, čo môžeme vyjadriť $\Delta t\to 0$, odkiaľ potom $\frac{1}{m}\to\infty$, a teda aj $\frac{\Delta K}{\Delta t}\to\frac{dK}{dt}$.
Potom vzťah (5) môžeme prepísať na tvar

$$\frac{dK}{dt}=K(t)\cdot i,$$

čo je separovateľná diferenciálna rovnica 1. rádu. Riešme ju:

$$\frac{dK}{K(t)}=i\,dt,$$

$$\int \frac{1}{K(t)}\,dK = \int i\,dt\,,$$
$$\ln|K(t)| = i \cdot t + c_1\,,$$
$$|K(t)| = e^{i \cdot t + c_1}\,,$$
$$K(t) = c \cdot e^{i \cdot t}\,,\ \text{kde}\ c \in R^{+}\,. \tag{6}$$

Pre $t = 0$ je $K(t) = K_0$, čo dosadíme do vzťahu (6):

$$K_0 = c \cdot e^{i \cdot 0} \;\Rightarrow\; K_0 = c \cdot e^{0} \;\Rightarrow\; c = K_0\,,$$

a spätne dosadíme do (6):

$$K(t) = K_0 \cdot e^{i \cdot t}\,, \tag{7}$$

čo je exponenciálna funkcia. S rastúcim *t* rastie aj $K(t)$, teda rovnica (7) je „predstaviteľom“ zákona exponenciálneho rastu.

ZÁVER

Mnohé úlohy z rôznych vedných disciplín vedú k hľadaniu vzťahu medzi funkciami a ich deriváciami. Takéto vzťahy sa dajú zapísať pomocou diferenciálnych rovníc. Matematická analýza, ktorej jednou z najdôležitejších častí sú diferenciálne rovnice, má praktické využitie v rôznych vedných disciplínach, medzi ktoré určite patrí aj ekonomika a finančná veda.

Medzi základné druhy diferenciálnych rovníc patria aj separovateľné diferenciálne rovnice prvého rádu. V článku sme popísali tento druh diferenciálnych rovníc a ukázali sme, ako sa riešia. V ďalšej časti nášho príspevku sme uviedli dva príklady použitia tohto typu rovníc pri riešení odborných problémov. V prvom z príkladov sme hľadali dopytovú funkciu, ak bola daná elasticita dopytu a hodnota dopytu pri danej cene. V ďalšom sme sa zaoberali spojitým úrokovaním, pričom sme dokázali, že sa riadi zákonom exponenciálneho rastu. V oboch príkladoch sme dospeli k riešeniu separovateľných diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Takýchto príkladov sa dá nájsť veľké množstvo v rôznych iných vedeckých odboroch. Vyplýva nám z toho, že matematika so svojím aparátom má nezastupiteľné miesto v univerzitnom vzdelávaní.

POĎAKOVANIE

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu KEGA č. 029SPU-4/2018 s názvom „Digitálne edukačné aplikácie v matematike“.

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] Pechočiak, T. & Matušek, V. (2012). *Kapitoly z vyššej matematiky*. 1. vyd. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre. 196 s. ISBN 978-80-55-0893-0

[2] Sakálová, K. (2010). Niekoľko aplikácií diferenciálnych rovníc v ekonómii. 7s. Dostupné 2019-05-02 na http://fhi.sk/files/katedry/km/veda-vyskum/prace/2010/sakalova_1_2010.pdf

[3] Urbaníková, M. (2008). *Finančná matematika*. 1. vyd. Nitra: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre. 112 s. ISBN 978-80-8094-387-5

[4] Zentková, I. (2005). *Základy mikroekonómie*. 2. nezmenené vydanie. Nitra: Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre. 149 s. ISBN 80-8069-472-9

SEPARABLE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN EDUCATION AT SUA NITRA

ABSTRACT

Economic, statistical, physical, biological and other processes and phenomena can be characterized by variables that can be mathematically expressed. Dependence between quantities x and y can be expressed by a function $y = f(x)$. The change of the quantity y depending on the change of the quantity x can be expressed by derivation. In many common life tasks, we look for relationships between function $y = f(x)$ and its derivatives, which can be written using differential equations. Differential equations are part of mathematical analysis. In our paper we deal with one type of differential equations, namely the first-order separable differential equations. Our aim is to point out that even these differential equations have applications in various scientific disciplines. Here are some examples of using these equations in economics and finance.

KEYWORDS: differential equation, separable, demand function, continuous interest

Kontaktná adresa
PaedDr. Tomáš Pechočiak, PhD.,
Katedra matematiky, Fakulta ekonomiky a manažmentu,
Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre,
Tr. A. Hlinku 2, 949 76 Nitra,
E-mail: tomas.pechociak@uniag.sk

Katedra matematiky

Univerzitné matematické vzdelávanie

ako základ pre inovácie vo vede a technike

THE SUM OF ONE TYPE OF THE TELESCOPING SERIES

Radovan Potůček, CZ

ABSTRACT

This contribution deals with the sum of the special telescoping series. The terms of these series are reciprocals of the quadratic polynomials with two different positive integer roots. The main goal of the contribution is to give an exposition of these telescoping series and illustrate them by several simple examples. These examples are the basis for the main result of the paper – derivation the formula for the sum of these series using the limit of the sequence of the partial sums. After that we verify this main result by some examples using the basic programming language of the computer algebra system Maple 16. This contribution can be an inspiration for teachers who are teaching the topic Infinite series or as a subject matter for work with talented students.

KEYWORDS: sum of the series, sequence of partial sums, telescoping series, harmonic number, computer algebra system Maple

INTRODUCTION

This contribution arose in connection with the determination of the sum of the series of reciprocal cubic polynomials with one zero and two different positive integer roots $a < b$. This series has the form

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty} \frac{1}{k(k-a)(k-b)}.$$

After partial fraction decomposition this series can be rewritten in the form

$$\frac{1}{ab(b-a)} \sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty} \left(\frac{b-a}{k} - \frac{b}{k-a} + \frac{a}{k-b}\right) =$$

$$= \frac{1}{ab(b-a)} \sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty} \left(\frac{b-a}{k} - \frac{a+(b-a)}{k-a} + \frac{a}{k-b}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty} \left[\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-a}\right) - \frac{1}{b(b-a)}\left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{ab} \sum_{\substack{k=1\\k\neq a}}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-a}\right) - \frac{1}{b(b-a)} \sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty} \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right).$$

The main result of this contribution is derivation the formula for the sum $\sigma(a,b)$ of the second telescoping series

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty}\left(\frac{1}{k-a}-\frac{1}{k-b}\right)$$

First, let us recall some basic terms. The series

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots$$

converges to a limit s if and only if the sequence of partial sums $\{s_n\}=\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$ converges to s, i.e. $\lim_{n\to\infty}s_n=s$. We say that the series has a *sum* s and write $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=s$.

The nth *harmonic number* is the sum of the reciprocals of the first n natural numbers:

$$H(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

$H(0)$ being defined as 0. Basic and interesting information about harmonic numbers can be found e.g. in [1], [2], [3], [4], [5], and [6]. For $n=1,2,\dots,10$ we get the following table:

Tab. 1 Some harmonic and generalized harmonic numbers

$\boldsymbol{n}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\boldsymbol{H_n}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{7381}{2520}$

Source: own calculation

The *telescoping series* is any series where nearly every term cancels with a preceding or following term, so its partial sums eventually only have a fixed number of terms after cancellation. For example, the series

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k-2)},$$

where obviously the summational index $k\neq 2$, has the general kth term, after partial fraction decomposition, in the form

$$a_k=\frac{1}{k(k-2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k}\right).$$

After that we arrange the terms of the nth partial sum $s_n=a_1+a_3+a_4+\cdots+a_n$ in the form where can be seen what is cancelling. Then we find the limit $\lim_{n\to\infty}s_n$ of the sequence of the partial sums s_n in order to find the sum s of the infinite telescoping series. In our case we get

$$s_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-3}\right)+\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)\right]+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\Big]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-2+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right).$$

So we have

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} = -0{,}25\,.$$

The simple relationship between the telescopic series and the harmonic number is for positive integer a given by the formula (see e.g. [7])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+a)} = \frac{H(a)}{a}\,.$$

SPECIFIC EXAMPLES

Before deriving a formula for the sum $\sigma(a,b)$ of the series of reciprocals of the quadratic polynomials with two different positive integer roots $a < b$

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq a,b}}^{\infty} \frac{a-b}{k^2-(a+b)k+ab}\,,$$

i.e. the series

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq a,b}}^{\infty} \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right), \qquad (1)$$

we solve three specific examples whose generalization will be the formula for this sum calculation.

Example 1

Using nth partial sum calculate the sum **a)** $\sigma(4,5)$, **b)** $\sigma(4,6)$, **c)** $\sigma(4,7)$.

a) The *n*th partial sum of the series

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq 4,5}}^{\infty} \left(\frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-5}\right) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-5}\right) + \sum_{k=6}^{\infty} \left(\frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-5}\right)$$

has the form

$$\sigma_n(4,5) = \left(\frac{1}{-3} - \frac{1}{-4}\right) + \left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{-3}\right) + \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{-2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-6} - \frac{1}{n-7}\right) + \left(\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n-6}\right) + \left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-5}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{n-4} = -\frac{7}{4} + \frac{1}{n-4}\,.$$

Considering the facts that for any positive integer c is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \quad \text{and} \quad \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{n-c} = 0$$

we get

$$\sigma(4,5) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(4,5) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{7}{4} + \frac{1}{n-4}\right) = -\frac{7}{4}\,.$$

b) The *n*th partial sum of the series

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq 4,6}}^{\infty}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-6}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-6}\right)+\sum_{k=5}^{5}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-6}\right)+\sum_{k=7}^{\infty}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-6}\right)$$

has the form

$$\sigma_n(4,6)=\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{-5}\right)+\left(\frac{1}{-2}-\frac{1}{-4}\right)+\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{-3}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{-1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-7}-\frac{1}{n-9}\right)+\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-7}\right)+\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-6}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+2\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}=$$

$$=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}=$$

$$=H(5)-H(3)-2H(2)+2H(1)+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}=\frac{137}{60}-\frac{11}{6}-3+2+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}$$

$$=\frac{-11}{20}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4},$$

so we get

$$\sigma(4,6)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(4,6)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-11}{20}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}\right)=-\frac{11}{20}.$$

c) The *n*th partial sum of the series

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq 4,7}}^{\infty}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-7}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-7}\right)+\sum_{k=5}^{6}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-7}\right)+\sum_{k=8}^{\infty}\left(\frac{1}{k-4}-\frac{1}{k-7}\right)$$

has the form

$$\sigma_n(4,7)=\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{-6}\right)+\left(\frac{1}{-2}-\frac{1}{-5}\right)+\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{-4}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{-2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{-1}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{n-7}-\frac{1}{n-10}\right)+\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-9}\right)+\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-8}\right)+\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-7}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+2\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+2\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-3\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}=$$

$$=H(6)-3H(3)+2H(2)+\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4},$$

so we get

$$\sigma(4,7)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(4,7)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{49}{20}-\frac{33}{6}+3+\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}\right)=-\frac{1}{20}.$$

GENERAL FORMULA

The results of the three previous examples may be written by using the harmonic numbers in the following forms:

$$\sigma(4,6) = H(5) - H(3) - 2H(2) + 2H(1)\,,$$

$$\sigma(4,7) = H(6) - H(3) - 2H(3) + 2H(2)\,,$$

$$\sigma(4,5) = \frac{1}{4} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = H(4) - H(3) - 2H(1) = H(4) - H(3) - 2H(1) + 2H(0)\,.$$

By generalizing these particular relationships, we get the formula for the sum $\sigma(a,b)$ of the series (1):

Theorem 1 The series

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty}\left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right),$$

where $0 < a < b$ are positive integers, has the sum

$$\sigma(a,b) = H(b-1) - H(a-1) - 2[H(b-a) - H(b-a-1)]\,,$$

so the sum

$$\sigma(a,b) = H(b-1) - H(a-1) - \frac{2}{b-a}\,, \tag{2}$$

where $H(n)$ is the nth harmonic number.

Proof. By decomposing the *n*th partial sum of the series (1) to the sum of the sub-series

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq a,b}}^{\infty}\left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{a-1}\left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right) + \sum_{k=a+1}^{b-1}\left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right) + \sum_{k=b+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right),$$

and using the limit we gradually obtain formula (2) for the sum of the series (1):

$$\sigma_n(a,b) = \left[\left(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-b}\right) + \left(\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2-b}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{a-b-2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{a-b-1}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{a-b+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a-b+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{b-a-2} - \frac{1}{-2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{b-a-1} - \frac{1}{-1}\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{b-a+1} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{b-a+2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2b-2a} - \frac{1}{b-a}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{2b-2a+1} - \frac{1}{b-a+1}\right) + \left(\frac{1}{2b-2a+2} - \frac{1}{b-a+2}\right) + \cdots$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{n-b} - \frac{1}{n+a-2b}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-a-1} - \frac{1}{n-b-1}\right) + \left(\frac{1}{n-a} - \frac{1}{n-b}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{b-1} + \frac{1}{b-2} + \cdots + \frac{1}{b-a+1} - \frac{1}{a-1} - \cdots - \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + 2\cdot\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{b-a-1}\right) -$$

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{n-b+1}+\cdots+\frac{1}{n-a-1}+\frac{1}{n-a}=$$
$$=\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b-2}+\cdots+\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{b-a}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)-\left(\frac{1}{a-1}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)+$$
$$+2\cdot\left(\frac{1}{b-a-1}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{b-a}\right)+\frac{1}{n-b+1}+\cdots+\frac{1}{n-a+1}+$$
$$+\frac{1}{n-a}=H(b-1)-2H(b-a)-H(a-1)+2H(b-a-1)+$$
$$+\frac{1}{n-b+1}+\cdots+\frac{1}{n-a+1}+\frac{1}{n-a},$$

so we get

$$\sigma(a,b)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(a,b)=\lim_{n\to\infty}\{H(b-1)-H(a-1)-2[H(b-a)-H(b-a-1)]\}+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n-b+1}+\cdots+\frac{1}{n-a}\right)=H(b-1)-H(a-1)-\frac{2}{b-a}.$$

Example 2

Calculate the sum $\sigma(3,8)$ of the series

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq 3,8}}^{\infty}\left(\frac{1}{k-3}-\frac{1}{k-8}\right)=\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{k-3}-\frac{1}{k-8}\right)+\sum_{k=4}^{7}\left(\frac{1}{k-3}-\frac{1}{k-8}\right)+\sum_{k=9}^{\infty}\left(\frac{1}{k-3}-\frac{1}{k-8}\right)$$

using **a)** the nth partial sum, **b)** the formula (2).

a) The nth partial sum of the series above has the form

$$\sigma_n(3,8)=\left(\frac{1}{-2}-\frac{1}{-7}\right)+\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{-6}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{-4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{-3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{-2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{-1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{n-9}-\frac{1}{n-14}\right)+\left(\frac{1}{n-8}-\frac{1}{n-13}\right)+\left(\frac{1}{n-7}-\frac{1}{n-12}\right)+\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-11}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-10}\right)+\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-9}\right)+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-8}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+$$
$$+2\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{n-7}+\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}+\frac{1}{n-3}=$$
$$=H(7)-H(5)-H(2)+2H(4)-H(5)+\frac{1}{n-7}+\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}+\frac{1}{n-3},$$

so we get

$$\sigma(3,8)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(3,8)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{363}{140}-\frac{3}{2}-\frac{274}{60}+\frac{50}{12}+\frac{1}{n-7}+\frac{1}{n-6}+\frac{1}{n-5}+\frac{1}{n-4}+\frac{1}{n-3}\right)=\frac{97}{140}.$$

b) The series above has by the formula (1) for $a=3$ and $b=8$ the sum

$$\sigma(3{,}8) = H(7) - H(2) - 2[H(5) - H(4)] = \frac{363}{140} - \frac{3}{2} - 2\left(\frac{137}{60} - \frac{25}{12}\right) = \frac{97}{140}.$$

Thus, we have obtained identical results with both methods of calculation.

NUMERICAL VERIFICATION

We solve the problem to determine the values of the sum $\sigma(a,b)$ for $a = 1{,}2{,}3{,}4$ and for $b = a+1, a+2, a+3, a+4$. We use on the one hand an approximative direct evaluation of the sum

$$\sigma(a,b,t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq a,b}}^{t} \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right),$$

where $t = 1000000$, using the basic programming language of the computer algebra system Maple 16, and on the other hand the formula (2) for evaluation the sum $\sigma(a,b)$. We compare 20 pairs of these ways obtained sums $\sigma(a,b,1000000)$ and $\sigma(a,b)$ to verify the formula (2).

We use following simple procedure **`tsabpos`** and following two **for** statements:

```
> tsabpos:=proc(a,b,t)
  local k,sabt,sab; sabt:=0;
  for k from 1 to t do
      if (k<>a and k<>b) then sabt:=sabt+1/(k-a)-1/(k-b)
             else sabt:=sabt+0;
      end if;
  end do;
  sab:=harmonic(b-1)-harmonic(a-1)-2/(b-a);
  print("s(",a,b,")=",evalf[5](sab));
  print("s(",a,b,t,")=",evalf[5](sabt));
  print("diff=",evalf[6](abs(sabt-sab)));
  end proc:
> for i from 1 to 4 do
      for j from i+1 to i+4 do
      tsabpos(i,j,1000000);
      end do;
  end do;
```

The approximate values of the sums $\sigma(a,b)$ rounded to 4 decimals obtained by this procedure are written into the following table:

Tab. 2 The approximate values of the sums $\sigma(a,b)$ for some a and b obtained by formula (2)

$\sigma(a,b)$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$
$a=1$	-1.0000	0.5000	1.1667	1.5833	×	×	×
$a=2$	×	-1.5000	-0.1667	0.4167	0.7833	×	×
$a=3$	×	×	-1.6667	-0.4167	0.1167	0.4500	×
$a=4$	×	×	×	-1.7500	-0.5500	-0.0500	0.2595

Source: own computation in Maple 16

Computation of 16 pairs of the sums $\sigma(a,b)$ and $\sigma(a,b,1000000)$ took only 34 seconds. The absolute errors, i.e. the differences $|\sigma(a,b) - \sigma(a,b,1000000)|$, are all only between

$1 \cdot 10^{-6}$ and $4 \cdot 10^{-6}$. The relative quantification accuracies of the sums $\sigma(a, b, 1000000)$, i.e. the ratios $|[\sigma(a, b) - \sigma(a, b, 1000000)]/\sigma(a, b, 1000000)|$, are approximately between $1 \cdot 10^{-6}$ and $2 \cdot 10^{-5}$.

CONCLUSION

We dealt with the sum $\sigma(a, b)$ of the series of reciprocals of the quadratic polynomials with two different positive integer roots a, b $(a < b)$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq a,b}}^{\infty} \frac{a-b}{k^2 - (a+b)k + ab},$$

i.e. the telescoping series

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq a,b}}^{\infty} \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b}\right).$$

We derived that the sum $\sigma(a, b)$ of this series is given by simple formula

$$\sigma(a, b) = H(b-1) - H(a-1) - \frac{2}{b-a},$$

where $H(n)$ is the harmonic number.

We verified this main result by computing 16 sums by using the computer algebra system Maple 16. The series above so belong to special types of the series, such as geometric and telescoping ones, which sums are given analytically by means of a formula.

REFERENCES

[1] Benjamin, A. T., Preston, G. O. & Quinn, J. J. A Stirling Encounter with Harmonic Numbers. In: Mathematics Magazine 75 (2), 2002, p. 95 -103. Retrieved 2019-04-18 from https://www.math.hmc.edu/.benjamin/papers/harmonic.pdf

[2] dCode — The ultimate 'toolkit' to solve every games / riddles / geocaches. Retrieved 2019-04-18 from https://www.dcode.fr/harmonic-number

[3] Harmonic Number. Brilliant.org. Retrieved 2019-04-18 from https://brilliant.org/wiki/harmonic-number/

[4] Hoffmann, M. Sums of Generalized Harmonic Series (Not Multiple Zeta Values). 27 p., 2014. Retrieved 2019-04-18 from http://www.usna.edu/Users/math/meh/usna14a.pdf

[5] Hoffmann, M. & Moen, C. Sums of Generalized Harmonic Series. Integers 14 (2014). 11 p. Retrieved 2019-04-18 from http://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/o46/o46.pdf

[6] Wikipedia contributors. Harmonic number. Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 2019-04-18 from https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_number

[7] Wikipedia contributors. Telescoping series. Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved 2019-04-18 from https://en.wikipedia.org/wiki/Telescoping_series

Contact address
RNDr. Radovan Potůček, Ph.D.
Department of Mathematics and Physics, Faculty of Military Technology
University of Defence, Kounicova 65, 662 10 Brno, Czech Republic
E-mail: Radovan.Potucek@unob.cz

Katedra matematiky

University mathematical education
as a basis for innovations in science and technology

RULED SURFACES IN ARCHITECTURE

Jana Sklenárová, SK

ABSTRACT

We describe in this article the important class of surfaces, consisting of those which contain infinitely many straight lines. We will introduce the definition of the ruled surface and the general equation of the ruled surface. We divide the ruled surface into developable and non-developable surfaces. The main goal of this article is showed that the ruled surfaces are around us in construction and architecture. They are also used in the mechanical engineering industry, in the modelling of car structures, aircraft etc. People use it because they have excellent static properties. In architecture, there are numerous examples of ruled surface including cooling towers, saddle roofs, bridges and buildings. These departments of industry use the fundamentals of ruled surfaces there you can read about this application especially in architecture.

KEYWORDS: ruled surface, developable and non-developable surfaces, architecture

INTRODUCTION

We describe in this article the important class of surfaces, consisting of those which contain infinitely many straight lines. We meet with ruled surfaces in everyday life. Ruled surfaces are the easiest of all surfaces to parametrize.

In this article we discuss the essential definitions and theorems, frequently with illustrations, then to give either the reference to its source or to its demonstration in a well-known book. The proofs in this article are not included.

In the second section, we will introduce the definition of the ruled surface and the general equation of the ruled surface. We divide the ruled surface into developable and non-developable surfaces. The developable surfaces are cylinders, cones, and tangent developable surfaces, or a composition of these.

In the final section, we will talk about the ruled surfaces are widespread in construction and architecture. Builders have been using them for a long time in the construction of buildings, roofs and other building because they have suitable static properties. We will survey and discuss examples of the use of developable surfaces in contemporary architecture.

Cylinders and cones are simple examples of ruled surfaces. More complicated ruled surfaces are of interest to architects, especially with complicated shapes. There are numerous examples of ruled surface structures in architecture, including cooling towers (one-sheet hyperboloids), saddle roofs (hyperbolic paraboloids), bridges and buildings.

MATERIAL AND METHODS

The position of the point on the surface is formed by two curves, because of this it depends on two independent parameters u and v (see Fig.1). The surface is the set of curves $k,\ {}^1k,\ {}^2k\ ...,$ which depend on the parameter u. Then the individual points of the curves correspond to the values of $u,\ {}^1u,\ {}^2u\ ....$, which is dependent on the parameter v. We can say that the surface is $\Phi(u,v)$ a set of points in space. We apply the definition from these books [2], [8].

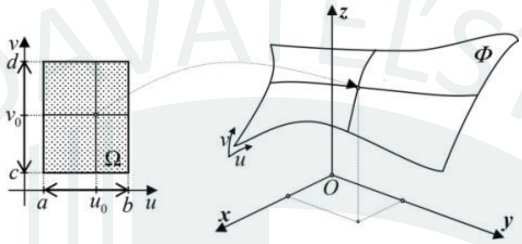


Fig. 1 Surface dependent on two independent parameters u, v (Source: [9])

The parametric representation can be written:

$$R = O + \overrightarrow{\Phi(u,v)},$$

where:

- $(u,v) \in \Omega$
- u and v are point parameters $\overrightarrow{\Phi(u,v)}$.

A surface is a two dimensional object. We need two pieces of information to uniquely define a point on a surface (the parameters u and v).

Ruled surfaces

The definitions of a ruled surface are equivalent:

A surface is such that through each point of it passes a straight line that is fully contained in the surface. For each point $X \in \Phi$ there is at least one straight line $p^x :\ X\ \in p^x$ where $p^x \subseteq \Phi$, which the straight lines are generators of the ruled surface. This definition is discussed in [1].

Or we can find other definitions such as [5], [3]. A ruled surface is one which can be generated by the motion of a straight line in $\boldsymbol{E^3}$.

All real lines of space E^3, which they are correspond one, two or three independent conditions and they are called complex line, congruent line or ruled surface. We can find more information in this [4].

The ruled surface cannot be a surface of positive Gaussian curvature. The Gaussian curvature of the ruled surface is negative or equal to zero. This property is described in [7].

The general equation of a ruled surface is defined in Euclidean space E^3 is as follows [1]:

$$\mathrm{X} = 0 + \overrightarrow{\mathrm{Q(u)}} + \mathrm{v}\,\overrightarrow{\mathrm{R(u)}},$$

where:

- we must have a curve k is a curve through which all generators pass, we call it the directrix of the surface (also call the base curve) (see Fig. 2), whose parametric representation is defined by an equation

$$X = O + \overrightarrow{Q(u)}, \qquad u \in J$$

- $\overline{Q(u)}$ and $\overline{R(u)}$ are vector functions that belong to a parameter u
- the vector $\overline{R(u)}$ defines the direction of the generators
- $v \in \mathbb{R}$

The straight lines mentioned in the definitions are the generators or rulings of the surface. The ruled surface rulings φ crosses a curve k. For every value $u_0 \in J$ belong the point on the curve M_0, which lies on the curve k and crosses a line $p_0 \subset \varphi$ and has a director vector $\overline{R(u_0)}$.

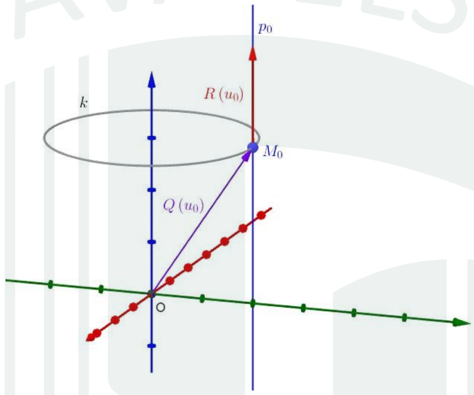


Fig. 2 Creation of ruled surface (Source: own)

Developable surfaces

Developables are ruled surfaces for which the lines, called the generators (ruling). We can find more information in this [3], [5], [6].

A developable surface is a special kind of ruled surface where the tangent plane is constant along the ruling.

A developable surface is a surface whose Gaussian curvature is everywhere zero.

Developable surface is a surface defined by an equation:

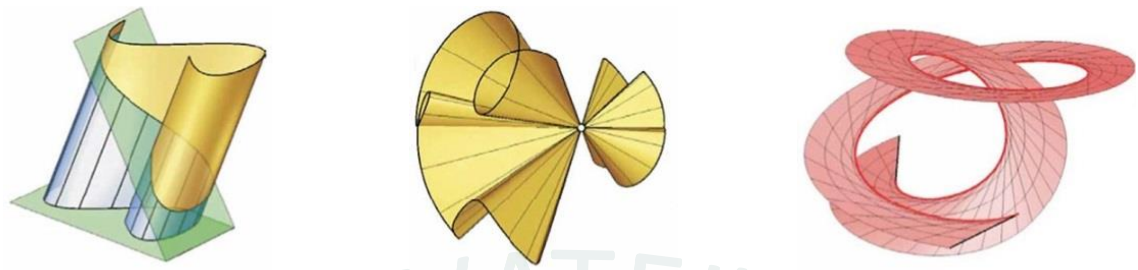
$$X = 0 + \overline{Q(u)} + v\,\overline{R(u)} = 0 + \overline{P(u,v)}. \qquad (5)$$

According to these books **[7]**, [10] are three types of developable surfaces (ruled surfaces of zero Gaussian curvature):

1) Cylindrical surfaces, where all generating lines are parallel (Fig. 3a)
2) Conical surfaces, where all generating lines run through a fixed point, the apex or vertex $V$of the surface (Fig. 3b)
3) Not degenerated developable surfaces (torse surfaces or torsal ruled surfaces or torses) are the surfaces in which generating lines are tangents of a space curve: this type of surface is spanned by a set of straight lines tangential to a space curve (Fig. 3c)
4) a composition of these.

Any developable surface is a cylindrical surface, or a conical surface, or else a surface of tangent lines of the arbitrary curve.

The most obvious examples of developable surfaces other than the plane are cylinder and cone as seen in Fig. 3.



(a) Cylindrical surface (b) Conical surface (c) Surface of tangent lines

Fig. 3 The three kinds of developable surfaces (Curves in bold are directrix and generators) (Source: [10])

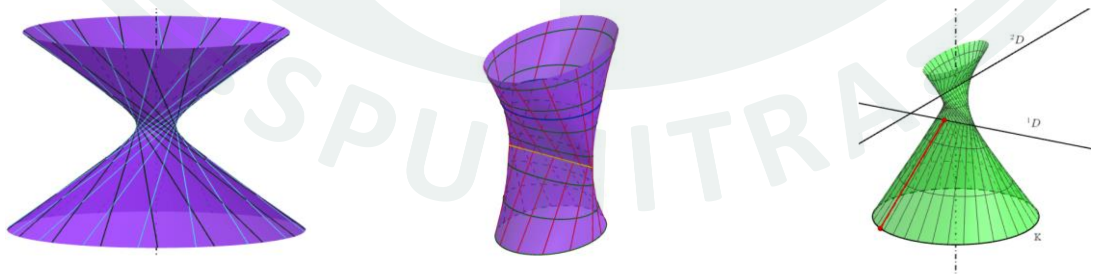
Non-developable surfaces

Most surfaces are not developable surfaces. The non-developable surface is a two-dimensional ruled surface of 3D Euclid space having negative Gaussian curvature in its every point. Ruled surfaces of negative Gaussian curvature are called oblique ruled surfaces or skew ruled surfaces, or ruled saddle-shaped surfaces too.

Non-developable surface is created by continuous straight line motion p, which intersects three curves ${}^1k,\ {}^2k,\ {}^3k$. These curves can be surfaces ${}^1\psi,\ {}^2\psi,\ {}^3\psi$, which ruling p must be touching. Curves ${}^1k,\ {}^2k,\ {}^3k$ do not lie on a developed surface.

According to this book [7] ruled surfaces of negative Gaussian curvature are divided:

1) Oblique ruled surfaces of the second order (twice ruled surfaces or doubly ruled surface)
    a) Hyperbolic paraboloids
    b) One-sheet hyperboloids
2) Oblique ruled surfaces of more than the second order and not algebraic oblique ruled surfaces including
    a) Conoids (from a class of Catalan's surfaces)
    b) Oblique and right helicoids
    c) Cylindroids (from a class of Catalan's surfaces)
    d) Surfaces of an oblique transition
    e) The surface of an oblique wedge
    f) The surface of a double oblique conoid
    g) Surfaces of an oblique cylinder and surfaces of a double oblique cylindroid



(a) One-sheet hyperboloids (b) Right Conoid (c) Stramberk castle

Fig. 4 Selected kinds of non-developable surfaces (Source: own)

RESULTS AND DISCUSSION

The ruled surfaces are widespread in construction and architecture. They have excellent static properties; they are used in the construction of buildings, roofing of buildings, and the construction of heating towers, halls, bridges and many modern architectural gems. They are also used in the mechanical engineering industry, in the modelling of car structures, aircraft etc. Cylinders and cones are simple examples of ruled surfaces. More complicated ruled surfaces are of interest to architects, especially with complicated shapes. There are numerous examples of ruled surface structures in contemporary architecture, including cooling towers, saddle roofs, bridges and buildings.

Cylindrical and conical surface

A typical example of a cylindrical surface in architecture is seen in Fig.5 e.g. Centre Georges Pompidou, Tycho Brahe Planetarium in Copenhagen or The Lucile Halsell Conservatory.
Centre Georges Pompidou is the public information library. There are many structural supports on the outside of the building, which are mostly cylindrical surfaces. The Tycho Brahe Planetarium is located in Copenhagen, Denmark. The planetarium building is a single cylindrical surface. The Lucile Halsell Conservatory is a complex of greenhouses located in Texas. Some greenhouses have the shape of a cylindrical other conical surfaces.


Centre Georges Pompidou (Source: [Z01])


Tycho Brahe Planetarium in Copenhagen (Source: [Z02])


The Lucile Halsell Conservatory (Source: [Z03])

Fig. 5 Cylindrical and conical surface in architecture

One-sheet hyperboloids and hyperbolic paraboloids

Hyperboloids of one sheet and hyperbolic paraboloids belong to the more specific class of doubly ruled surfaces. A doubly ruled surface that contains two families of rulings. Doubly ruled surfaces have two distinct straight lines through each point on them and can be created by lines in two different ways.

Hyperboloid of one sheet is an integral part of construction and architecture. The best known are see in Fig.6 e.g. cooling towers of power plants or The Cathedral of Brasilia is a hyperboloid structure constructed from 16 concrete columns, weighing 90 tons each. Corporation Street Bridge is the bridge shaped in the form of a hyperboloid and links the buildings.

Hyperbolic paraboloids are an example of a surface with a saddle point. It is often used in construction practice, e.g. for different types of roofing are see in Fig.6 e.g. Warsaw Ochota. Warsaw Ochota has a saddle roof in the shape of a hyperbolic paraboloid.

The Cathedral of Brasilia. (Source: [Z04])

Corporation Street Bridge. (Source: [Z05])

Warszawa Ochota train station in Poland (Source: [Z06])

Fig. 6 One-sheet hyperboloids and hyperbolic paraboloids in architecture

Conoids

Conoids are of high interest with architects because they can be manufactured easily. The shape of the conoid is often used for roofing large buildings, production halls or warehouses see Fig. 7 e.g. the terminal at Brno Airport in Tuřany or The Morton H. Meyerson Symphony Center has a rectangular ground plan where windows are on both walls in the shape of the conoid and composed of metal structures.

Circular conoids are needed in retaining walls on dams of water reservoirs or when retaining bulk materials. This shape can distribute the pressure acting on the wall and thus increase the resistance of the building to pressure. For example, as see Fig. 7 the Daniel-Johnson Dam.

The terminal at Brno Airport in Tuřany (Source: [Z07])

Morton H. Meyerson Symphony Center in Dallas (USA) (Source: [Z08])

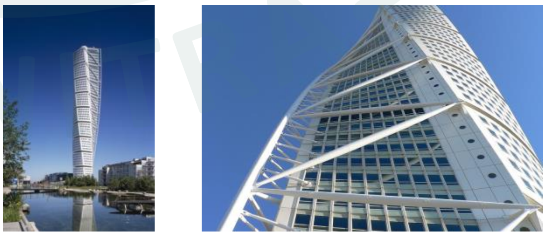
Daniel-Johnson Dam (Canada) (Source: [Z09])

Fig. 7 Conoids in architecture

Spiral surface

All spiral surfaces or parts are used as surfaces of different drills.
In construction, it is mostly used as the spiral staircases. For example, the spiral staircases in serves as the main entrance to the Louvre Museum (see Fig. 8)
A typical example of a spiral surface in architecture is Turning Torso. Turning Torso is the world's first twisting skyscraper, rotating 90 degrees in nine pentagonal pieces as seen in Fig.8.

Louvre Palace in Paris (Source: [Z10])



Turning Torso (Sweden) (Source: [Z11])

Fig. 8 Spiral surface in architecture

CONCLUSION

In the article, we approached the ruled surface. We imagined the definition of the ruled surface and the general equation of the ruled surface.

One of the basic theorems on the ruled surface is: Gaussian curvature of the controlled surface is negative or equal to zero. Then according to [7], we divided the ruled surfaces of zero Gaussian curvature or negative Gaussian curvature. A developable surface is a surface whose Gaussian curvature is everywhere zero. The most obvious examples of developable surfaces other than the plane are cylinder and cone or a surface of tangent lines of the arbitrary curve. Most surfaces are not developable surfaces. Ruled surfaces of negative Gaussian curvature are called non-developable surfaces. Non-developable surfaces divided of the second order (hyperbolic paraboloids and one-sheet hyperboloids) or more than the second order (conoids, helicoids, cylindroids, etc.)

Nowadays, ruled surfaces are also around us. Ruled surfaces are seen in every day for example in architecture. In architecture, there are numerous examples of ruled surface including cooling towers, saddle roofs, bridges and buildings, as you could see in this article.

REFERENCES

[1] Biran, A. (2018). *Geometry for Naval Architects*. ISBN: 9780081003282, pp. 278-282

[2] Bredon, Glen E. (1993). *Topology and Geometry*. Springer-Verlag. ISBN 0-387-97926-3. DOI:10.1007/978-1-4757-6848-0

[3] Do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, pp. 52

[4] Edge, W. L. (1931). *The Theory of Ruled Surfaces*. Cambridge, University Press, Journal: Bull. Amer. Math. Soc. 37 , 791-793, DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1931-05248-4

[5] Eisenhart, L. P. (2004). *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Ginn and Company, Boston, New York, https://projecteuclid.org/euclid.chmm/1428681970. pp.241-244

[6] Gray, A., Abbena, E., Salamon, S. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Third Edition, Chapman & Hall/CRC, ISBN:1584884487, pp. 431-452

[7] Krivoshapko, S.N., Ivanov, V.N. (2015). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*, ISBN 978-3-319-11773-7, Springer International Publishing Switzerland, https://doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7_1

[8] Kudličková, S. (2018). *Geometric transformations*, FMFI UK Bratislava.

[9] Kudličková, S., Tisoň, M. (2016). *Generation of surfaces of revolution and their visualization IKT*. FMFI UK Bratislava

[10] Lawrence, S. (2011). *Developable Surfaces: Their History and Application,* Nexus Network Journal – Vol. 13, No. 3, 2011 701**,** DOI 10.1007/s00004-011-0087, pp.701-702

Internet resources

[Z01] R. Piano, R. Rogers. Centre Georges Pompidou, 1972. https://en.wikipedia.org/wiki/Mus%C3%A9e_National_d%27Art_Moderne, https://en.wikipedia.org/wiki/Centre_Georges_Pompidou

[Z02] Tycho Brahe Planetarium in Copenhagen. 1989, from https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe_Planetarium

[Z03] Ambasz, E., The Lucille Halsell Conservatory, https://www.ambasz.com/lucille-halsell-conservatory

[Z04] Niemezer, O., The Cathedral of Brasilia. 1970, from https://en.wikipedia.org/wiki/Cathedral_of_Brasília

[Z05] Hodder, Corporation Street Bridge, 1999, from https://en.wikipedia.org/wiki/Corporation_Street_Bridge

[Z06] Warszawa Ochota train station. Brusel expo '58, 2009, from https://en.wikipedia.org/wiki/Warszawa_Ochota_train_station, http://expo58.blogspot.sk/2009/01/hyperbolick-paraboloid-uprosted-msta.html

[Z07] Brno–Tuřany Airport, from https://en.wikipedia.org/wiki/Brno%E2%80%93Tu%C5%99any_Airport
[Z08] Morton H. Meyerson Symphony Center, from https://en.wikipedia.org/wiki/Morton_H._Meyerson_Symphony_Center
[Z09] Daniel-Johnson Dam, from https://en.wikipedia.org/wiki/Daniel-Johnson_Dam
[Z10] Louvre Palace, from https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Palace, https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid
[Z11] Turning Torso in Sweden, 2005., from https://en.wikipedia.org/wiki/Turning_Torso#cite_note-:0-6

Internet resources are valid until 31.03.2019.

Contact address

Mgr. Jana Sklenárová,
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics. Comenius University in Bratislava,
Vinohradnícka 591, 951 32 Horná Kráľová,
E-mail: jannynka.sklenarova@gmail.com

Názov:
Univerzitné matematické vzdelávanie ako základ pre inovácie vo vede a technike
Recenzovaný vedecký zborník v elektronickej forme

Title:
University mathematical education as a basis for innovations in science and technology
Reviewed scientific proceedings in electronic form

Autor:	Kolektív autorov
Vydavateľ:	Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre
Rozsah:	81 strán
Rok vydania:	2019
Vydanie:	prvé

Zostavovatelia zborníka:	doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.
	Ing. Tatiana Ivanková

Príspevky neprešli jazykovou úpravou.
Za obsahovú a jazykovú úroveň príspevkov zodpovedajú autori.
Neprešlo redakčnou úpravou vo Vydavateľstve SPU v Nitre.

ISBN 978-80-552-2028-4